Logika dla socjologów
Część 3: Elementy teorii zbiorów i relacji

Rafał Gruszczyński

Katedra Logiki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

2011/2012

Spis treści

Zbiory dystrybutywne i kolektywne

- Dwa rodzaje zbiorów:
  - dystrybutywne
  - kolektywne
- Zbiory dystrybutywne są podstawowymi obiektami badanymi w matematyce.
- Przedmiotem tej części zajęć są zbiory w sensie dystrybutywnym.

Czym są zbiory dystrybutywne?

- Kolekcje obiektów
- Obiekty abstrakcyjne

Zbiory skończone i nieskończone

Definicja

Zbiorem skończonym nazywamy taki zbiór, którego liczbę elementów można wyrazić za pomocą pewnej liczby naturalnej.

Definicja

Zbiorem nieskończonym nazywamy zbiór, który ma co najmniej tyle elementów ile jest wszystkich liczb naturalnych.

Singletony

- Przypomnijmy, że zgodnie ze standardową notacją, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest zbiorem złożonym z obiektów $x_1, \ldots, x_n$. Jest to zbiór skończony złożony z n elementów.
- $\{x\}$ jest jednoelementowym zbiorem złożonym z x i jest czymś innym niż sam obiekt x, tzn. $x \neq \{x\}$.
- Zbiór $\{x\}$ nazywać będziemy singletonem x-a.

Singletony

Przykład

- Liczba 1 jest czymś innym zaś jednoelementowy zbiór złożony z 1, czyli $\{1\}$: $1 \neq \{1\}$.
- Podobnie, miasto Toruń jest czymś innym niż zbiór {Toruń}, tzn. Toruń $\neq$ {Toruń}.

Zbiór pusty

- Szczególnym zbiorem jest tzw. zbiór pusty, czyli zbiór nie mający żadnych elementów.
- Zbiór ten oznaczamy (standardowo) za pomocą symbolu '$\emptyset$'.

Ćwiczenie

Czym różni się $\emptyset$ od zbioru $\{\emptyset\}$?

Elementy zbioru i operator abstrakcji

- Fakt, że obiekt a należy do zbioru A zapisujemy w standardowy sposób jako '$a \in A$'.
- $\{x \mid \varphi(x)\}$ jest zbiorem wszystkich obiektów spełniających pewien dany warunek φ.
- $\{\ldots \mid \ldots\}$ określamy mianem operatora abstrakcji.

Zbiory – operator abstrakcji

Ćwiczenie

Z jakich elementów składają się poniższe zbiory?

- $\{x \mid x$ jest człowiekiem$\}$ jest zbiorem wszystkich ludzi.
- $\{x \mid x$ jest liczbą naturalną$\}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zbiór ten oznaczamy za pomocą litery '$\mathbb{N}$'.
- $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ i $x > 1$ i x dzieli się tylko przez 1 oraz $x\}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.
- $\{x \mid x$ jest studentem UMK$\}$ jest zbiorem wszystkich studentów UMK.

Zasada ekstensjonalności dla zbiorów

Zasada ekstensjonalności

Jeżeli zbiory X oraz Y mają te same elementy, to $X = Y$.

Ćwiczenie

$$
\begin{array}{rcl}
\{2,3\} & = & \{1+1, 2+1\} \\
\{1,2\} & = & \{2,1\} \\
\{\{\emptyset\}\} & \neq & \{\emptyset\} \\
\{1,1\} & = & \{1\} \\
\{1,\{1,2\}\} & \neq & \{2,\{1,2\}\} \\
\emptyset & = & \{x \mid x \text{ jest ujemną liczbą naturalną}\}
\end{array}
$$

Para uporządkowana

Definicja

- Parą uporządkowaną złożoną z elementów x oraz y nazywamy obiekt matematyczny, w którym istotna jest kolejność owych elementów.
- Parę uporządkowaną złożoną z x oraz y zapisujemy jako '$\langle x, y \rangle$'.

Zgodnie z powyższą charakterystyką podstawową własność par uporządkowanych możemy wyrazić w postaci poniżej równoważności:

$$\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle \quad \text{wtw} \quad x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2 \,.$$

Para uporządkowana

Ćwiczenie

$$\begin{array}{ccc}
\langle 2, 3 \rangle & = & \langle 1+1, 2+1 \rangle \\
\langle \text{Warszawa}, \text{Polska} \rangle & \neq & \langle \text{‘Warszawa’}, \text{Polska} \rangle \\
\langle 2, 3 \rangle & \neq & \langle \text{‘2’}, \text{‘3’} \rangle \\
\langle 0, 0 \rangle & = & \langle 0, 0 \rangle \\
\langle \emptyset, \emptyset \rangle & \neq & \langle \emptyset, \{\emptyset\} \rangle \\
\langle 2, 1 \rangle & \neq & \langle 1, 2 \rangle
\end{array}$$

Pary uporządkowane

Uwaga

W matematyce parę uporządkowaną złożoną z elementów x oraz y definiujemy w następujący sposób:

$$\langle x, y\rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Dowodzi się, że tak dla tak zdefiniowanej pary uporządkowanej zachodzi wspomniana wcześniej własność:

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \quad \text{wtw} \quad x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2\,.$$

Pary uporządkowane

Uwaga

- Poza pojęciem *pary uporządkowanej* definiujemy pojęcie *trójki uporządkowanej*, pojęcie *czwórki uporządkowanej* etc. etc.
- Trójkę uporządkowaną złożoną z obiektów x, y oraz z zapisujemy w postaci '$\langle x, y, z\rangle$'.
- Analogicznie, $\langle w, x, y, z\rangle$ to czwórka uporządkowana złożona z obiektów w, x, y oraz z.

Relacje

Problem

Co to jest relacja?

Matematyczne pojęcie *relacji*

- Relacją dwuargumentową nazywamy dowolny zbiór złożony z par uporządkowanych.
- Relacją n-argumentową nazywamy dowolny zbiór złożony z n-tek uporządkowanych.

Ćwiczenie

Czy zbiór $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ jest relacją (w sensie matematycznym)?

Matematyczne pojęcie *relacji*

Uwaga

- Relacja w sensie matematycznym określona jest zawsze w pewnym, z góry zadanym zbiorze.
- Zatem, mówiąc np. o dwuargumentowej relacji większości między liczbami, musimy określić o jakim zbiorze liczb mówimy.
- Tak więc mamy relację większości między liczbami naturalnymi, relację większości między liczbami wymiernymi etc. etc.

Matematyczne pojęcie *relacji*

Problem

- Podaj kilka przykładów relacji dwuargumentowych.
- Podaj przykład relacji trójargumentowej.
- Podaj przykład relacji czteroargumentowej.

Matematyczne pojęcie *relacji*

Ćwiczenie

Ustalmy zbiór ludzi jako uniwersum rozważań. Czym są poniższe relacje?

- relacja *kochania* $:= \{\langle x, y\rangle \mid x$ kocha y-a$\}$
- relacja *przyjaźni* $:= \{\langle x, y\rangle \mid x$ jest przyjacielem y-a$\}$
- relacja *pośredniczenia*
  $:= \{\langle x, y, z\rangle \mid x$ pośredniczy między y-iem a z-em$\}$