Andrzej Pietruszczak

BEZKWANTYFIKATOROWY RACHUNEK NAZW

Systemy i ich metateoria

- Toruń 1991 -

Druk książki sfinansowano z grantu nr 561-H
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

ISBN 83-85263-10-1

Redaktor
Marian Marszałek

Redaktor techniczny
Andrzej Zalewski

Korektor
Władysław Warmiński

Projektant okładki
Jadwiga Szymaniak

3359

WYDAWNICTWO ADAM MARSZAŁEK

Wydawnictwo Adam Marszałek 87-100 Toruń,
ul. Przy Kaszowniku 37 tel. 322-38, 282-46.
Wyd. I. Nakład 120 + 60 .

SPIS TREŚCI

Przedmowa 5

C z ę ś ć A

WPROWADZENIE W ZAGADNIENIA BEZKWANTYFIKATOROWEGO RACHUNKU NAZW

Rozdział I. Logiczna analiza niektórych wyrażeń językowych badanych w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw. Formuły bezkwantyfikatorowego rachunku nazw . . 11

Rozdział II. Semantyka bezkwantyfikatorowego rachunku nazw. . . 23

Rozdział III. Fragmentaryczne teorie bezkwantyfikatorowego rachunku nazw 38

Rozdział IV. Pewne zagadnienia semantyczne 54

C z ę ś ć B

METATEORIA AKSJOMATYCZNYCH SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH BEZKWANTYFIKATOROWEGO RACHUNKU NAZW NADBUDOWANYCH NAD KLASYCZNYM RACHUNKIEM ZDAŃ

Rozdział I. Aksjomatyczne systemy dedukcyjne bezkwantyfikatorowego rachunku nazw nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań 60

Rozdział II. Porównywanie systemów aksjomatycznych 70

C z ę ś ć C

SYSTEMY BEZ FUNKTORÓW NAZWOTWÓRCZYCH

Komentarz do konstrukcji części C i D oraz do uzyskanych tam wyników 75

Rozdział I. Współczesne systemy sylogistyczne 80

Rozdział II. Tradycyjne systemy sylogistyczne 92

Rozdział III. Bezkwantyfikatorowe fragmenty ontologii Leśniewskiego 94

Część D

SYSTEMY Z FUNKTORAMI NAZWOTWÓRCZYMI

Rozdział I. Boole'owski system sylogistyczny 112

Rozdział II. Boole'owski bezkwantyfikatorowy fragment ontologii Leśniewskiego 117

Dodatek: Elementarna algebra Boole'a i jej pewne rozszerzenia. 122

SPIS AKSJOMATÓW 125

BIBLIOGRAFI 127

Przedmowa

Rachunek nazw jest działem logiki badającym rozmaite postacie nazw i funktorów o argumentach nazwowych, oraz związki logiczne zachodzące pomiędzy zdaniami, w których te nazwy i funktory występują. Powyższe związki możemy wyrażać m. in. za pomocą formuł zdaniowych (zdań lub funkcji zdaniowych), w których jako zmienne występują jedynie tzw. zmienne nazwowe[1]. W badaniach przeprowadzonych w kwantyfikatorowym rachunku nazw możemy również używać kwantyfikatorów wiążących zmienne nazwowe. Jednak w tym przypadku występują znane trudności z ich interpretacją ([8], [9], [10], [23]). Trudności tych unikamy w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw, w którym w ogóle nie rozpatrujemy takich kwantyfikatorów, więc również nie korzystamy z nich przy analizie związków logicznych. Formuły zdaniowe stosowane w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw są po prostu schematami zdań języka naturalnego. Schematy te powstają wprost ze zdań w oparciu o analizę ich struktury powierzchniowej, przy czym zmienne nazwowe występują zamiast (w miejscu) nazw.

W ramach rachunku nazw (zarówno kwantyfikatorowego jak i bezkwantyfikatorowego) badamy różne zbiory formuł zdaniowych domknięte ze względu na jakieś operacje konsekwencji, czyli tzw. teorie logiczne[2]. Oczywiście w alfabetach teorii należących do

---

1 Tj. zmienne za które możemy podstawiać nazwy (przy czym w przeciwieństwie do rachunku predykatów nie muszą być to jedynie nazwy jednostkowe). Stąd, jak również z wykonywania pewnego rodzaju »rachunków« na formułach zdaniowych, bierze się zapewne termin 'rachunek nazw'.

2 Czasami zbiory te nazywa się również rachunkami nazw. Powoduje to dwuznaczność terminu 'racunek nazw'. W drugim znaczeniu jest to

bezkwantyfikatorowego rachunku nazw, nie występują kwantyfikatory wiążące zmienne nazwowe.

Użyty w powyżej przyjętym sensie termin *rachunek nazw* jest w pewnym stopniu mylący. W rzeczywistości chodzi przecież o badanie logiki pewnych wybranych nazw i funktorów (o argumentach nazwowych) zaliczanych do stałych logicznych[3].

Praca podzielona jest na cztery części. Dwie pierwsze znich, A i B, poświęcone są metodologii bezkwantyfikatorowego rachunku nazw, ze zwróceniem szczególnej uwagi na zagadnienia syntaktyczne i semantyczne. Analizowane pojęcia z metodologii definiowane są w terminach teorii mnogości.

W części A poruszanych jest kilka problemów należących do filozofii logiki. W rozdziale I zajmuję się logiczną analizą pewnych wybranych wyrażeń językowych badanych w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw. Przytaczam m. in. słabą i mocną interpretację zdań kategorycznych. Przy mocnej interpretacji wymagana jest dla prawdziwości zdań niepustość podmiotu. Z powyższymi interpretacjami związane są, zaproponowane przez Kotarbińskiego, słabe i mocne zdania ogólno-twierdzące oraz, zaproponowane przez Lejewskiego, słabe i mocne zdania ogólno-przeczące. Dodatkowo analizuję jeszcze - pochodzącą od Strawsona - »super« mocną interpretację zdań ogólno-przeczących, zakładającą niepustość podmiotu i orzecznika. Dla interpretacji tej proponuję »super« mocne zdania ogólno-przeczące. Z innych rodzajów zdań przedstawiam zdania

---

nazwa ogólna oznaczająca każdą teorię logiczną należącą do rachunku nazw - w poprzednio użytym znaczeniu terminu.

3 Powyższa uwaga stosowna jest również w sytuacji, gdy ten dział logiki nazwiemy logiką nazw ([17]). Podobnie w rachunku zdań (logice zdań) chodzi o badanie logiki pewnych spójników zdaniowych zaliczanych do stałych logicznych.

dzące się z ontologii Leśniewskiego zdania jednostkowe, identyczności owe i egzystencjalne. Dołączam również zdania postaci *dokładnie jedno S jest P*. Z funktorów nazwotwórczych zajmuję się jedynie negacją przynazwową oraz sumą i iloczynem nazw. Na zakończenie rozdziału pierwszego buduję zbiór formuł zdaniowych bezkwantyfikatorowego rachunku nazw wykorzystując, oprócz zmiennych nazwowych i spójników zdaniowych, piętnaście stałych logicznych reprezentujących funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych, trzy stałe reprezentujące funktory nazwotwórcze oraz stałą reprezentującą nazwę uniweralną. Formuły zdaniowe bezkwantyfikatorowego rachunku nazw są schematami zdań języka naturalnego pozwalającymi przedstawić, poprzez swoją strukturę graficzną, formę logiczną zdań podpadających pod dany schemat.

Rozdział drugi części A poświęcony jest semantyce bezkwantyfikatorowego rachunku nazw. Oprócz intuicyjnej semantyki podstawień leksykalnych przedstawiona jest semantyka teoriomnogościowa oraz podaję warunek ich równoważności. W intuicyjnej semantyce podstawień leksykalnych dana formuła zdaniowa jest tautologią, gdy przy każdym podstawieniu nazw za zmienne zdaniowe przekształca się w zdanie prawdziwe. Semantyka teoriomnogościowa polega na wykorzystaniu układów złożonych z dowolnie wybranego niepustego zbioru nazwanego *uniwersum* oraz funkcji przyporządkowującej dowolnej zmiennej nazwowej jakiś podzbiór uniwersum. Układy takie nazywamy *modelami*. Mówimy, że formuła zdaniowa jest spełniona w danym modelu, gdy pomiędzy zbiorami przyporządkowanymi zmiennym występującym w tej formule, zachodzą relacje odpowiednie dla tej formuły. Dana formuła zdaniowa jest teoriomnogościową tautologią, gdy jest spełniona w każdym modelu. Widoczna różnica pomiędzy dwoma definicjami tautologii polega na tym, że pierwsza mówi o wszystkich podstawieniach nazw za zmienne, podczas gdy druga mówi o wszystkich

stawieniach nazw za zmienne, podczas gdy druga mówi o wszystkich przyporządkowaniach zbiorów. Łatwo można zauważyć, że każda teoriomnogościowa tautologia jest również tautologią w ujęciu leksykalnym, gdyż każej nazwie możemy przyporządkować zbiór będący jej zakresem. Z drugiej strony, gdyby każdy zbiór był wyznaczony przez jakąś nazwę jako jej zakres,to bez żadnych dodatkowch warunków można byłoby udowodnić, że jest również odwrotnie, tzn. że każda tautologia w ujęciu leksykalnym jest tautologią teoriomnogościową. W rzeczywistości brakuje nam nazw; nie każdemu zbiorowi możemy przyporządkować taką nazwę, której byłby on zakresem. Jeżeli jednak język naturalny, którego nazwy podstawiamy za zmienne spełnia pewien warunek, to uda się nam udowodnić równozakresowość obu definicji tautologii. Warunek ten przedstawia się następująco: dla każdej formuły elementarnej teorii liczb z jedną zmienną wolną istnieje w języku naturalnym taka nazwa generalna, której zakres pokrywa się ze zbiorem liczb naturalnych spełniających tę formułę. Warunek ten nie jest specjalnie wygórowany, gdyż elementarna teoria liczb obejmuje tylko to, co można powiedzieć o liczbach naturalnych w terminach dodawania, mnożenia, znaku równości, spójników zdaniowych i kwantyfikatorów, bez potrzeby używania zbiorów. W dowodzie tego faktu wykorzystałem związek bezkwantyfikatorowego rachunku nazw z węższym monadycznym rachunkiem predykatów z identycznością, przy okazji dokładnie analizując ów związek.

Poza powyższym przypadkiem pozostałe wyniki pracy uzyskujemy bez korzystania z metateorii teorii pierwszego rzędu.

Z semantyką teoriomogościową związany jest problem zaangażowania ontologicznego bezkwantyfikatorowego rachunku nazw. Pokazujemy, że użytkownik języka naturalnego, który stosuje rachunek nazw wykorzystując tautologie do stwierdzania związków wynikania, nie musi przyjmować teoriomnogościowej ontologii. Zbiorami

chunku nazw.

W rozdziale III części A badam fragmentaryczne teorie bezkwantyfikatorowego rachunku nazw, w których występują jednie niektóre wybrane stałe z podanej listy. Pokazuję, że dla formuł bez negacji przynazwowej i nazwy uniweralnej, zakres definicji tautologii nie ulegnie zmianie, gdy do klasy modeli z niepustym uniwersum dołączymy model z pustym uniwersum.

Po powyższym rozszerzeniu klasy modeli przechodzę do badania różnych zawężonych klas modeli. Związane jest to z pewnymi problemami logiki tradycyjnej, która nie dopuszczała podstawień nazw pustych. Pokazuję, że w logice tej bez negacji przynazwowej ograniczenie podstawień do nazw niepustych jest równoważne ograniczeniu podstawień do tzw. nazw ogólnych, mających co najmniej dwa desygnaty. Podobnie jest w logice tradycyjnej z negacją przynazwową z tym, że zamiast o nazwach niepustych mówimy o tzw. nazwach limitowanych (tj. niepustych i o niepustych negacjach), zamiast zaś o nazwach ogólnych mówimy o tzw. nazwach ogólno-limitowanych (tj. ogólnych i o negacjach ogólnych). Powyższe wyniki są szczególnymi wnioskami wyprowadzonymi z ogólnej analizy spełniania w zawężonych klasach modeli dla teorii fragmentarycznych. W analizie tej wykorzystano, wprowadzone w tej pracy, pojęcie zgodności zbioru terminów z daną klasą modeli.

Pozostałe części pracy poświęcone są aksjomatycznym systemom dedukcyjnym bezkwantyfikatorowego rachunku nazw nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań. W części B badamy metateorię takich systemów. Wprowadzony jest w niej aparat pojęciowy wykorzystywany później w częściach C i D.

W częściach C i D przeprowadzono aksjomatyzację kilkudziesięciu konkretnych teorii. Można było zbadać tak dużą ilość systemów dzięki zastosowaniu jednolitej metateorii dostosowanej do każdego

dzięki zastosowaniu jednolitej metateorii dostosowanej do każdego z nich. Ogromna większość z przedstawionych systemów nie była jeszcze badana. Te które były znane wcześniej badam z dwóch powodów. Po pierwsze, aby zachować systematyczność, co umożliwia dokonywanie porównań poszczególnych aksjomatyk. Drugim powodem było to, że wcześniej ich pełność była zbadana innymi metodami. Przykładowo, Shepherdson w [30] i Takano w [33] korzystali z metateorii teorii pierwszego rzędu, zaś Boczarow w [1], chociaż - podobnie jak w niniejszej pracy - nie korzystał z tej metateorii, stosował jednak rozszerzenie języka systemu ściśle związane z badanym przez niego systemem. Ponadto, dla systemów znanych wcześniej podałem nowe równoważne aksjomatyki.

W części C badane są systemy sylogistyczne oraz bezkwantyfikatorowe fragmenty ontologii Leśniewskiego, sformułowane bez funktorów nazwotwórczych. Analogiczne systemy z funktorami nazwotwórczymi badane są w części D. Te dwie części pracy nawiązują do pewnego, znaczącego dla logiki polskiej, programu badawczego zainicjowanego przez Łukasiewicza i kontynuowanego przez Słupeckiego.

Niniejsza praca jest zmienioną wersją mojej rozprawy doktorskiej obronionej na Wydziale Humanistycznym Uniwerytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu w roku 1990. Pragnę w tym miejscu gorąco podziękować za kierownictwo naukowe i okazaną życzliwość promotorowi rozprawy Profesorowi Leonowi Gumańskiemu. Pragnę również serdecznie podziękować recenzentom rozprawy - Profesorowi Grzegorzowi Malinowskiemu oraz Profesorowi Wojciechowi Suchoniowi, za cenne i wnikliwe uwagi, które starałem się uwzględnić przygotowując pracę do publikacji.

A. P.

CZĘŚĆ A
WPROWADZENIE W ZAGADNIENIA BEZKWANTYFIKATOROWEGO RACHUNKU NAZW

Rozdział I

Logiczna analiza niektórych wyrażeń językowych badanych w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw. Formuły bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

§1. Zdania kategoryczne

1.1.Interpretacja naturalna. Tradycyjnie, do zdań kategorycznych zaliczamy te, które powstają z połączenia odpowiednich nazw, nadających się na podmiot i orzecznik, za pomocą jednego z następujących funktorów: *każde...jest...* (zdania ogólno-twierdzące), *pewne ...jest...* (zdania szczegółowo-twierdzące), *żadne...nie jest...* (zdania ogólno-przeczące) oraz *pewne...nie jest...* (zdania szczegółowo-przeczące). Powszechnie przyjmowana jest taka interpretacja tych funktorów, przy której:

- zdanie ogólno-twierdzące jest prawdziwe wtw[1] zakres podmiotu zawarty jest w zakresie orzecznika,
- zdanie szczegółowo-twierdzące jest prawdziwe wtw podmiot i orzecznik mają wspólny desygnat,
- zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtw zakresy podmio-

[1] 'wtw' jest skrótem zwrotu 'wtedy i tylko wtedy, gdy'

tu i orzecznika są rozłączne,

- zdanie szczegółowo-przeczące jest prawdziwe wtw podmiot ma desygnat nie będący desygnatem orzecznika.

Interpretację tę uznajemy za naturalne rozumienie powyższych funktorów. Oprócz naturalnej stosowane były również inne interpretacje. Związane to było z tzw. problemem nazw pustych (tj. nie posiadających żadnego desygnatu) w logice tradycyjnej ([32], [3], [20]). Dalej wymienimy tylko te interpretacje, które są stosowane w naszej pracy. Pozostałe są dokładnie omówione w rozprawach [3] oraz [32].

1.2.Słaba i mocna interpretacja zdań ogólnych. Na to, aby w ogólnym przypadku, gdy nie odrzucamy nazw pustych, ze zdania o schemacie *każde S jest P* wynikało zdanie o schemacie *pewne S jest P*, wystarczy (przy zachowaniu naturalnej interpretacji funktora *pewne ...jest...*) rozumieć funktor *każde...jest...* w tzw. sensie mocnym, przy którym:

- zdanie ogólno-twierdzące jest prawdziwe wtw podmiot jest nazwą niepustą mającą zakres zawarty w zakresie orzecznika.

Poprzednio przedstawioną naturalną ([32], s.72) interpretację tego funktora nazywa się *słabą*. Tak również nazywa się naturalną ([32], s.72) interpretację funktora *żadne...nie jest...*, a oprócz niej wprowadzono dodatkowo dwie inne:

- mocną, przy której zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtw podmiot jest nazwą niepustą o zakresie rozłącznym z zakresem orzecznika,
- »super« mocną, przy której zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtw podmiot i orzecznik są nazwami niepustymi o rozłącznych zakresach.

Oczywiście te nowe interpretacje pokrywają się z naturalnymi (tj. słabymi) na zbiorze nazw niepustych, lecz dysusyjne jest to,

czy odpowiadają one naszym intuicjom związanym ze znaczeniem zwrotów *każde...jest...* oraz *żadne...nie jest...*.

1.3.Słabe i mocne zdania ogólne. Aby w ogóle nie podejmować takich dyskusji, można - wzorując się na Tadeuszu Kotarbińskim i Czesławie Lejewskim - wprowadzić do języka potocznego inne rodzaje zdań kategorycznych zbudowanych za pomocą zwrotów, których naturalne rozumienie pokrywa się z odpowiednimi interpretacjami przedstawionymi w 1.2.

Funktor *każde...jest...* w znaczeniu mocnym zawiera implicite warunek niepustości podmiotu ([32], s. 73). Tadeusz Kotarbiński zaproponował w [7], aby "w języku potocznym można było odróżnić... dwa sposoby użycia zdania ogólnego, zachowując np. formę *Każde A jest B* dla zdania ogólnego w znaczeniu mocnym, *Wszelkie A jest B* - dla zdania ogólnego w znaczeniu słabym" (s. 227). Skoro dokonał On takiego wyboru, to uważał, że w potocznym znaczeniu funktora *wszelkie...jest...* nie zawarte jest, nawet implicite, zastrzeżenie o niepustości podmiotu. Jeśli tak jest w istocie, to zastrzeżenie to musi być związane implicite ze zwrotem *każde*. Zamiast pojęcia mocnego i słabego rozumienia, Tadeusz Kotarbiński wprowadził dwa rodzaje zdań ogólno-twierdzących: mocne - z funktorem głównym *każde...jest...* (s. 233), oraz słabe - z funktorem głównym *wszelkie...jest...* (s. 234). Oczywiście każdy z tych funktorów ma - po przyjęciu tej konwencji - tylko jedno znaczenie. Zauważmy, że przy ograniczeniu terminów do niepustych, omawiane funktory mają ten sam sens, gdyż to co ma być zawarte implicite w znaczeniu zwrotu *każde* jest już zawarte explicite w założeniu nałożonym na terminy.

Podobnie można wprowadzić do języka potocznego trzy rodzaje zdań ogólno-przeczących: słabe, mocne i »super« mocne. Zdania słabe budować możemy za pomocą zwrotu *żadne...nie jest...* przyj-

mując dla niego jego słabą interpretację. Dla dwóch dalszych typów należy znaleźć w języku potocznym zwroty, których naturalne rozumienie pokrywa się odpowiednio z mocnym i »super« mocnym rozumieniem funktora *żadne...nie jest...* . Dla zdań mocnych zwrotem tym może być przykładowo - *każde...nie jest...*, zaś dla zdań »super« mocnych - zwrot *każde...nie jest... i odwrotnie* (wzorowany na funktorze *wszelkie...jest... i odwrotnie*, używanym przez Tadeusza Kotarbińskiego; p. 2.1). Wynika to z naszych poprzednich uwag dotyczących zwrotu *każde*. Zauważmy, że przy ograniczeniu terminów do niepustych, interpretacja nowych funktorów pokrywa się z interpretacją funktora *żadne...nie jest...*, gdyż to co ma być implicite zawarte w znaczeniu zwrotu *każde* jest już zawarte explicite w założeniu nałożonym na terminy, oraz to co jest zawarte explicite w znaczeniu zwrotu *i odwrotnie*, jest już zawarte implicite w (naturalnym) znaczeniu fuktora *żadne...nie jest....*

Te ostatnie rozwiązania możemy porównać z rozwiązaniem przyjętym przez Czesława Lejewskiego w [11]. Przypomnijmy, że przyjął On od Tadeusza Kotarbiańskiego dwa rodzaje zdań ogólno-twierdzących: słabe - zbudowane za pomocą funktora *all...is...* (the functor of weak inclusion), oraz mocne - zbudowane za pomocą funktora *every...is...* (the functor of strong inclusion). Czesław Lejewski wprowadził również dwa rodzaje zdań ogólno-przeczących: słabe - zbudowane za pomocą fuktora *no...is...* (the functor of weak exclusion), oraz moce - zbudowane za pomocą zwrotu *every...is-not...* (the functor of strong exclusion; [11] s. 129 i 130). Te ostatnie dwa zwroty mają u Czesława Lejewskiego odpowiednio tę samą interpretację co funktory słabego i mocnego zdania ogólno-przeczącego, wprowadzone przez nas w poprzednim akapicie.

Dodajmy, że Tadeusz Kotarbiński posługiwał się w [7] tylko jednym rodzajem zdań ogólno-przeczących. Jako funktor główny miały

one jednak - zamiast zwrotu *żadne...nie jest...*- wyrażenie *każde...nie jest...* (s. 213). Mogło ono być rozumiane w sposób słaby bądź mocny (s. 226), analogicznie do słabego bądź mocnego rozumienia zwrotu *każde...jest....*

Ponieważ logika tradycyjna ograniczała stosowanie swoich praw do nazw niepustych, więc z jej punktu widzenia nie są odróżnialne znaczeniowo funktory, których interpretacje pokrywają się na zbiorze nazw niepustych, i równie dobrze każdy z nich mógłby występować w schematach logiki tradycyjnej.

§2. Inne rodzaje zdań

2.1.Zdania równości zakresowej. Zdania te powstają z połączenia odpowiednich nazw funktorem *wszelkie...jest... i odwrotnie*. Funktor ten był używany przez Tadeusza Kotarbińskiego ([7],s. 235) w zdaniu stwierdzającym równość zakresów podmiotu i orzecznika. Synonimem tego funktora jest zwrot *jedynie wszelkie...jest...* ([9]).

2.2.Zdania jednostkowe w sensie Leśniewskiego. Rozróżniamy zdania jednostkowe twierdzące i zdania jednostkowe przeczące. Pierwsze powstają z połączenia odpowiednich nazw spójką *...jest...*, drugie zaś - spójką *...nie jest...* . W interpretacji Stanisława Leśniewskiego zdanie jednostkowe twierdzące (odp. przeczące) jest prawdziwe wtw podmiot jest nazwą jednostkową i jego desygnat jest (odp. nie jest) desygnatem orzecznika ([7], s. 230, [11], s. 129 i 130).

.2.3.Zdania identycznościowe w sensie Leśniewskiego. Funktorem głównym tych zdań będzie zwrot *...jest tym samym przedmiotem co...* wzorowany na zwrocie występującym w [11]: *...is the same object as...* (the functor of singular identity; s. 130). W interpretacji Stanisława Leśniewskiego zdanie identycznościowe jest prawdziwe wtw oba jego argumenty są nazwami jednostkowymi mającymi ten sam

desygnat. Zdania identycznościowe można budować również przy użyciu zwrotu ... *jest identyczne z* ... ([2], s.278).

2.4.Zdania egzystencjalne. W badaniach systemów rachunku nazw związanych z ontologią Leśniewskiego, interesujące będzie rozpatrywanie następujących funktorów używanych w ontologii: *istnieje co najmniej jedno...*, *istnieje dokładnie jedno...* oraz *co najwyżej istnieje jedno....* Zdania zbudowane za pomocą tych funktorów są prawdziwe odpowiednio wtw argument posiada co najmniej jeden desygnat (tzn. jest nazwą niepustą), dokładnie jeden desygnat (tzn. jest nazwą jednostkową), co najwyżej jeden desygnat (tzn. nie jest nazwą ogólną).

Ponadto mażemy analizować zdania, których funktorami głównymi są zwroty *dokładnie jedno...jest...* oraz *co najwyżej jedno... jest...*, i *dokładnie jedno...nie jest...* oraz *co najwyżej jedno... nie jest...* ([17], s. 148 i 149). Uzupełniają one niejako zdania szczegółowo-twierdzące i szczegółowo-przeczące, które mogłyby być przecież zbudowane odpowiednio za pomocą funkorów: *co najmniej jedno...jest...* oraz *co najmniej jedno...nie jest....* W przyszłości będziemy zajmować się jedynie pierwszym z wymienionych w tym akapicie funktorów. Zdania zbudowane z jego pomocą są prawdziwe wtw podmiot i orzecznik mają dokładnie jeden wspólny desygnat. Interpretacja pozostałych z przedstawionych tu funktorów jest również oczywista.

§3. Funktory nazwotwórcze

W pracy tej będziemy zajmować się jedynie trzema funktorami nazwotwórczymi od argumentów będących nazwami generalnymi[2]. Będą

2 Używamy terminu 'nazwa generalna' zgodnie z [16]. Zatem nazwa generalna to taka "nazwa, która w zdaniu atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej nadaje się na orzecznik. Nazwa generalna może być ogólna [tj. mieć więcej niż jeden desygnat (A.P.)], jednostkowa (tu należąca deskrypcje...) [tj. mieć dokładnie jeden desygnat (A.P.)] lub pusta [tj. nie mieć desygnatu (A.P.)]" (s. 183).

nimi: jednoargumentowy funktor negacji przynazwowej *nie...*, i dwuargumentowe funktory *...i...* oraz *...lub....*

Zauważmy, że klasa nazw generalnych jest domknięta ze względu na działanie powyżej wymienionych funktorów. Jednak klasa nazw niepustych nie jest domknięta ani na działanie funktora *nie...*, ani na działanie funktora *...i....* Podobnie jest z klasą nazw ogólnych (tj. mających co najmniej dwa desygnaty). Klasy te są domknięte jedynie ze względu na działanie funktora *...lub....*

§4. Formuły bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

Zbiór formuł bezkwantyfikatorowego rachunku nazw tworzymy za pomocą metody schematów logicznych. Metodę tę omawia się szerzej między innymi w [26], [27], [28] oraz [17]. Możemy przyjąć, że schematy (formuły) zdaniowe i nazwowe powstają wprost ze zdań i nazw języka naturalnego w oparciu o analizę ich struktury składniowej (powierzchniowej). Określone w ten sposób schematy przydatne są w definiowaniu relacji wynikania pomiędzy zdaniami, w których składowymi zdaniami atomowymi są zdania omawiane w §1 i 2[3].

4.1.Zmienne nazwowe. Przyjmijmy, że litery S, P, M, Q, S_1, P_1, M_1, Q_1, S_2, P_2,... itd., są zmiennymi reprezentującymi (w sensie

3 Oczywiście, można również dodać inne zdania, np. te, które wymieniła A. Morawiec w [17].

3359

występowania zamiast) dowolne nazwy generalne języka naturalnego[4]. Zbiór tych zmiennych (nieskończony i przeliczalny) oznaczamy przez ZM.

4.2.Symbole reprezentujące stałe logiki nazw. Aby uwolnić się od przypadłości języka naturalnego (takich jak szyk wyrazów czy fleksja) posłużmy się symbolami reprezentującymi odpowiednie funktory omawiane w §§1, 2 i 3. Pozwala to przede wszyskim na przedstawienie w prosty sposób logicznej struktury zdań, przez wyodrębnienie w nich różnego rodzaju składników i zaznaczanie sposobu w jaki tworzą one całość zdaniową.

Przy stosowaniu tej metody powstaje dość skomplikowana sytuacja, gdy mamy do czynienia z wyrażeniami, które chcemy zaliczyć do stałych logicznych (i dlatego chcemy zastąpić je symbolem, tzw. stałą), lecz dla których dopuszczalnych jest kilka sposobów interpretacji. Powstały wtedy problem możemy rozwiązać na różne sposoby. Po pierwsze, możemy przyjąć dla tego wyrażenia tylko jeden reprezentujący go symbol. W tym przypadku, w zależności od przyjętej

[4] Zgodnie z [16] nazwy generalne nadają się na podmiot i orzecznik w zdaniach kategorycznych. Za Leśniewskim przyjmujemy, że nazwy generalne nadają się również na podmiot w zdaniu "atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej" (co nie jest sprzeczne z określeniem nazw generalnych z [16]). Zatem nazwy generalne mogą być argumentami funktorów omawianych w §§ 1, 2 i 3.

Leśniewski nie stosował podziału nazw na generalne i indywidualne (tj. według [16]: "nazwy, które w zdaniu atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej nadają się jedynie na podmiot"; s. 183). Posługiwał się On jedną kategorią nazw obejmującą oba rodzaje. Dopuszczał zatem, aby nazwy indywidualne występowały w podmiotach i orzecznikach wszystkich rozważanych przez nas zdań.

Kwestia dopuszczalności podstawiania nazw indywidualnych za zmienne ni ma wpływu na zagadnienia formalne związane z rachunkiem nazw, związana jest tylko ze stosowaniem jego tautologii. Jeżeli - tak jak Leśniewski - przyjmiemy jedną niepodzielną kategorię nazw, to w zastosowaniach możemy uznać,że zmienne reprezentują dowolne nazwy.

interpretacji tego symbolu, otrzymujemy »różne logiki reprezentowanego wyrażenia«. Po drugie, możemy tych kilka interpretacji »objąć jedną logiką«, przyjmując, że przy każdej z nich wyrażenie jest reprezentowane przez inny symbol (któremu oczywiście nadajemy odpowiednie rozumienie). To drugie podejście jest szczególnie ciekawe wtedy, gdy wyrażenie w jednym ze swoich znaczeń jest przekładalne na inne wyrażenia wśród których jest ono samo w innym znaczeniu. Powyższe uwagi najłatwiej zilustrować na przykładzie spójnika *jeżeli... , to...* . Jeśli zastąpimy go jednym symbolem, to w zależności od zastosowanej interpretacji otrzymamy różne logiki tego funktora (np. klasyczną, intuicjonistyczną, różne logiki implikacji ścisłej). Możemy również zastąpić ten funktor kilkoma symbolami różnie interpretowanymi, np ⇒ możemy rozumieć jak implikację materialną, zaś < - jak implikację ścisłą (tu jednak istnieje znowu wiele sposobów interpretacji tego funktora). Wiemy, że wtedy p<q jest definiowane przez □(p⇒q), gdzie □ jest symbolem funktora *konieczne jest, że...* (funktor ten jest rozumiany na wiele sposobów, i to powoduje różne interpretacje symbolu <). Podobnie jest ze spójnikiem *lub*. W języku potocznym ma przynajmniej dwa znaczenia. Mianowicie może być rozumiany np. jako alternatywa zwykła i jako alternatywa rozłączna ([4]). Jeżeli przy pierwszym znaczeniu zastąpimy go symbolem ∨, zaś przy drugim - symbolem $\underline{\vee}$, to formuła p$\underline{\vee}$q może być zdefiniowana przez formułę (p∨q)∧¬(p∧q), gdzie ¬ oraz ∧ są odpowiednio symbolami, rozumianych w sposób klasyczny, funktorów zdaniotwórczych *nieprawda, że...* oraz *...i....*

W naszych rozważaniach również mamy do czynienia z powyżej opisaną sytuacją. Jak zaznaczyliśmy w §1., dla funktora *każde...jest...* przyjmowano dwie interpretacje: słabą bądź mocną. Zatem w przypadku, gdy funktor ten reprezentowany jest przez jeden symbol (np. a), musimy wyraźnie zaznaczyć, jaką interpretację wy-

bieramy (ustalamy). Przy każdym z wyborów otrzymujemy inną logikę tego funktora. Logiki te możemy porównywać, np. badając, które formuły są prawami obu, a które tylko jednej z nich. My pójdziemy inną drogą i przyjmiemy, że symbol a będzie reprezentował funktor *każde...jest...* rozumiany w sensie słabym, zaś symbol a$^{\cdot}$ będzie reprezentował ten funktor, gdy rozumiemy go w sensie mocnym. Zatem będziemy mieć możliwość analizowania obu interpretacji w obrębie jednej teorii. Przy tym nie tracimy nic z zalet pierwszego podejścia. Aby badać zagadnienia z pierwszego podejścia, możemy po prostu »ignorować kropkę« (oczywiście, nie będziemy mieć wtedy formuł »mieszanych« z a oraz a). Ponadto, gdy przyjmiemy propozycję Tadeusza Kotarbińskiego (punkt 1.3), możemy odczytywać symbol a jako *wszelkie...jest...*, zaś symbol a$^{\cdot}$ jako *każde...jest...* .

Podobne rozwiązanie zastosujemy dla funktora *żadne...nie jest...*, który może być rozumiany na trzy sposoby (p.1.2.). Przyjmujemy, że symbol e będzie reprezentował ten funktor przy słabym rozumieniu, symbol e$^{\cdot}$ - przy mocnym, zaś symbol e$^{\cdot\cdot}$ - przy »super« mocnym. Ponadto - przyjmując propozycję z punktu 1.3. - możemy odczytywać symbol e jako *żadne...nie jest...*, symbol e$^{\cdot}$ jako *każde...nie jest...*, zaś e$^{\cdot\cdot}$ jako *każde...nie jest... i odwrotnie.*

Pozostałe funktory wymienione w § 1-3, będziemy analizować tylko przy jednej interpretacji, zatem każdemu z nich wystarczy przyporządkować jakiś pojedyńczy symbol. Przyjmijmy, że funktor *pewne...jest...* będzie reprezentowany przez symbol i , funktor *pewne... nie jest...* - przez symbol o, funktor *wszelkie...jest... i odwrotnie* - przez symbol ≡ , funktor *...jest...* - przez symbol ε, funktor *...nie jest...* - przez symbol $\bar{\varepsilon}$, funktor *...jest tym samym przedmiotem co...* - przez = , funktor *istnieje co najmniej jedno...* - przez ex , funktor *istnieje dokładnie jedno...* - przez ex! , funktor *co najwyżej istnieje jedno...* - przez sol oraz funktor *dokładnie jedno...jest...* - przez symbol i!. Funktory nazwotwórcze *nie...*, *...lub...* oraz *...i...* będą reprezentowane odpowiednio przez symbole ' , + oraz · .Wśród nazw generalnych do stałych logicznych zaliczamy jedynie nazwę *przedmiot* (inaczej: *obiekt*)[5]. Będzie ona reprezentowana przez symbol V . Poza symbolami ≡ oraz i! , wszystkie inne są tradycyjnie używane w sylogistyce i ontologii Leśniewskiego. Symbol i! ma się tak do i jak ex! do ex.

Oznaczmy przez $\mathbb{FZ}^1$ zbiór złożony z wymienionych powyżej symboli reprezentujących jednoargumentowe funktory zdaniotwórcze o argumencie nazwowym, tj. zbiór {ex , ex!, sol}. Podobnie niech $\mathbb{FZ}^2$:={a, a$^{\cdot}$, i, e, e$^{\cdot}$, e$^{\cdot\cdot}$, o, ≡, ε, $\bar{\varepsilon}$, =, i!}[6]. Ponadto niech $\mathbb{FN}^1$:={'}, $\mathbb{FN}^2$:={+, ·} oraz $\mathbb{FZ}$:=$\mathbb{FZ}^1\cup\mathbb{FZ}^2$, $\mathbb{SN}$:={V}$\cup\mathbb{FN}^1\cup\mathbb{FN}^2$ i $\mathbb{S}$:=$\mathbb{SN}\cup\mathbb{FZ}$.

4.3.Termy. Zbiorem formuł nazwowych (inaczej: termów lub schematów nazwowych) jest najmniejszy zbiór $\mathbb{T}$ zawierający zbiór $\mathbb{ZM}\cup$(V) i spełniający poniższe warunki:

- jeżeli $\underline{S} \in \mathbb{T}$, to $\underline{S}' \in \mathbb{T}$
- jeżeli $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$, to $(\underline{S} + \underline{P}) \in \mathbb{T}$ oraz $(\underline{S} \cdot \underline{P}) \in \mathbb{T}$

Litery $\underline{S}$, $\underline{P}$, $\underline{M}$ oraz $\underline{Q}$ (z indeksami bądź bez) będą używane jako zmienne syntaktyczne (metajęzykowe) przebiegające zbiór $\mathbb{T}$.

4.4.Formuły zdaniowe. Zbiorem formuł zdaniowych (inaczej: schematów zdaniowych) jest najmniejszy zbiór $\sum$ spełniający poniższe warunki:

- jeżeli $\underline{S} \in \mathbb{T}$ i § $\in \mathbb{FZ}^1$, to §$\underline{S} \in \sum$
- jeżeli $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$ i § $\in \mathbb{FZ}^2$, to $\underline{S}$§$\underline{P} \in \sum$
- jeżeli $\sigma \in \sum$, to $\neg\sigma \in \sum$

---

5 Również w [17] wśród nazw prostych jako stałą logiczną wyróżnia się jedynie nazwę 'obiekt' ('przedmiot').

6 ':=' to symbol równości na mocy definicji.

- jeżeli $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum$ i $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, to $(\sigma_1 \S \sigma_2) \in \sum$

Litera σ (z indeksem bądź bez) jest zmienną syntaktyczną przebiegającą zbiór $\sum$, zaś symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ oraz $\Leftrightarrow$ reprezentują odpowiednio funktory zdaniotwórcze o argumentach zdaniowych: negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji materialnej i równoważności materialnej. Funktory te będziemy interpretować w sposób klasyczny. W formule zdaniowej $\underline{S} \S \underline{P}$ (gdzie $\S \in \mathbb{FZ}^2$) term $\underline{S}$ reprezentuje podmiot, zaś term $\underline{P}$ reprezentuje orzecznik zdania. Formuły zdaniowe z $\sum$ pozwalają przedstawić, poprzez swoją strukturę graficzną, formę logiczną zdań podpadających pod dany schemat.

Rozdział II

Semantyka bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

W paragrafie pierwszym podamy określenie tautologii używając podstawień leksykalnych (tj. podstawień nazw za zmienne nazwowe). Używając zaś teorii mnogości - w paragrafie drugim - podamy inną definicję tego pojęcia. Tę drugą definicję możemy traktować jako teoriomnogościową eksplikację określenia z paragrafu pierwszego, gdyż zakładając, że język naturalny ma pewną dostateczną ilość nazw generalnych, można pokazać, że oba sposoby definiowania są zakresowo równoważne. Założenie to nie będzie zbyt wygórowane, i możemy je raczej uważać za oczywiste. Określenie z paragrafu drugiego spełnia wymogi współczesnego podejścia do metateorii logicznej (metalogiki). Mówi o tym Adam Nowaczyk w [19]: "Kluczem do rozwiązania problemu formalnego charakteru logiki może być spostrzeżenie, że w »oficjalnych« (tj. nie mających charakteru intuicyjnych komentarzy i dydaktycznych uproszczeń) wywodach logicznych korzysta się wyłącznie z pojęć definiowanych w terminach teorii mnogości bądź innych teorii matematycznych redukowalnych do teorii mnogości" (s. 24).

Bez przyjęcia założenia o dostatecznym bogactwie nazw generalnych, można łatwo wykazać, że spełnienie warunków podanych w teoriomnogościowej definicji leksykalnej wystarczy do spełnienia warunków podanych w jej leksykalnym odpowiedniku. Ponadto, dla pokazania, że nie są spełnione warunki w definicji leksykalnej wys-

tarczy znaleźć choć jeden kontrprzykład podstawienia.

§1. Ujęcie w terminach podstawień leksykalnych

1.1.Substytuty konkretne. Niech $^\circ$ będzie dowolnym podstawieniem konkretnym nazw generalnych za zmienne z $\mathbb{ZM}$. Z podstawieniem $^\circ$ związana jest w oczywisty sposób funkcja sub° określona na zbiorze $\sum$, która dowolnej formule σ przyporządkowuje zdanie $sub^\circ(\sigma)$ powstające po podstawieniu w miejsce wszystkich zmiennych $\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k$ występujących w σ nazw $\underline{S}_1^\circ,\ldots,\underline{S}_k^\circ$, oraz w miejsce symboli z $\mathbf{S}$ reprezentowanych przez nie wyrażeń językowych.

Substytutem konkretnym formuły σ jest każde zdanie otrzymane z σ przy jakimś podstawieniu konkretnym za zmienne z $\mathbb{ZM}$ ([4]). Zatem, gdy $^\circ$ jest podstawieniem konkretnym, to $sub^\circ(\sigma)$ jest substytutem konkretnym formuły σ.

1.2.Tautologie. Dana formuła z $\sum$ jest tautologią wtw każdy jej substytut konkretny jest zdaniem prawdziwym ([4], s. 58). Inaczej mówiąc: formuła σ z $\sum$ jest tautologią wtw przy każdym podstawieniu konkretnym $^\circ$, zdanie $sub^\circ(\sigma)$ jest prawdziwe.

1.3.Wynikanie logiczne, równoważność logiczna. Niech Z będzie zbiorem zdań języka naturalnego, które możemy otrzymać z formuł należących do $\sum$ za pomocą jakiegoś podstawienia konkretnego. Formalnie, $Z:=\{sub^\circ(\sigma) : \sigma \in \sum$ i $^\circ$ jest podstawieniem konkretnym$\}$. Przyjmijmy, że zdania $z_0,z_1\ldots,z_k$ $(k\geq 1)$ należą do Z. Mówimy, że ze zdań $z_1,\ldots,z_k$ wynika zdanie z_0 ze względu na interpretację stałych reprezentowanych przez symbole z $\mathbf{S}$ wtw istnieje należąca do $\sum$ tautologia $(\sigma_1\wedge\ldots\wedge\sigma_k)\Rightarrow\sigma_0$ taka, że dla pewnego podstawienia konkretnego $^\circ$ mamy $z_i=sub^\circ(\sigma_i)$, przy $i=0,1,\ldots,k$ [7].

[7] W powyższej definicji niezbędna była relatywizacja pojęcia wynikania do zbioru $\mathbf{S}$. Świadczy o tym poniższy przykład wnioskowania, pochodzący od De Morgana (przekształcony dla potrzeb tej pracy):

Każdy koń jest ssakiem.

Każda głowa jakiegoś konia jest głową jakiegoś ssaka.

Wniosek wynika z przesłanki. Jednak wpływ na te wynikanie ma wewnętrzna budowa nazw złożonych za pomocą innych funktorów niż 'nie', 'i' oraz 'lub'. Czyli wynikania tego nie wykażemy w ramach rozwijanej przez nas teorii.

Mówimy, że zdanie z_1 jest równoważne logicznie zdaniu z_2 $(z_1,z_2\in Z)$ ze względu na interpretację stałych reprezentowanych przez symbole z $\mathbf{S}$ wtw istnieje należąca do $\sum$ tautologia $\sigma_1\Leftrightarrow\sigma_2$ taka, że dla pewnego podstawienia konkretnego $^\circ$ przy i=1,2 mamy $z_i=sub^\circ(\sigma_i)$.

§2. Semantyka teoriomnogościowa

2.1.Wyjaśnienia wstępne. W 1.1. wprowadziliśmy funkcję podstawiania nazw generalnych za zmienne z $\mathbb{ZM}$. Gdy dla danej nazwy n przyjmiemy, że $D(n)$ jest jej denotacją (zakresem), to możemy złożyć dwa odwzorowania $\underline{S}\mapsto\underline{S}^\circ$ i $n\mapsto D(n)$ otrzymując odwzorowanie $\underline{S}\mapsto D(\underline{S}^\circ)$. Ponieważ wszystkie funktory reprezentowane przez symbole z $\mathbf{S}$ są ekstensjonalne, więc w definicji tautologii w 1.2., istotną rolę odgrywają nie same nazwy, lecz ich zakresy. Możemy zatem poszukać teoriomnogościowej eksplikacji tej definicji. W nowej definicji zrezygnujemy z podstawień konkretnych nazw za zmienne nazwowe i będziemy posługiwać się funkcjami przyporządkowującymi bezpośrednio każdej zmiennej nazwowej jakiś zbiór. Mówiąc obrazowo: przejdziemy od zmiennych nazwowych do zbiorów z pominięciem powyżej przedstawionych odwzorowań.

Oczywiście powyższe uwagi nie znaczą, że od tej pory zmienne nazwowe reprezentują zbiory[8].

2.2.Modele dla zmiennych. Wprowadzone w tym punkcie pojęcie modelu wzorowane jest na podobnym, podanym w pracy [17] (przedstawioną tam koncepcję logiki nazw wysunął Roman Suszko).

Modelem dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$ jest dowolna para uporządkowana $\mu=(U,d)$, w której U jest niepustym zbiorem (nazywanym *uniwersum modelu*), zaś d jest funkcją (nazywaną dla obrazowości *funkcją denotacji*) przyporządkowującą każdej zmiennej z $\mathbb{ZM}$ jakiś podzbiór zbioru U.

2.3.Spełnianie. Każde wyrażenie językowe reprezentowane bądź przez jakiś symbol należący do zbioru $\mathbb{S}$, bądź przez któryś z symboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ traktujemy jako stałą logiczną o ustalonej interpretacji związanej z przyjętą logiką.

Interpretacja stałych ze zbioru $\mathbb{SN}$ polega na jednolitym (dla wszystkich modeli) i jednoznacznym sposobie przedłużania funkcji d z modelu $\mu=(U,d)$ do funkcji D^U określonej na całym zbiorze termów $\mathbb{T}$ i przyjmującej jako wartości podzbiory zbioru U. Przedłużenie to jest jednoznaczne i spełnia następujące warunki rekurencyjne:

dla $\underline{S},\underline{P}$ z $\mathbb{T}$

$D^U(V)=U$

$D^U(\underline{S})=U\setminus D^U(\underline{S})$

$D^U(\underline{S}\cdot\underline{P})=D^U(\underline{S})\cap D^U(\underline{P})$

$D^U(\underline{S}+\underline{P})=D^U(\underline{S})\cup D^U(\underline{P})$

Interpretacja stałych ze zbioru $\mathbb{FZ}$ oraz symboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ polega na jednolitym (dla wszystkich modeli) przyporządkowaniu w sposób jednoznaczny dowolnemu modelowi $\mu=(U,d)$ pewnego podzbioru

8 W przyjętym przez nas sensie pojęcia reprezentowania, nawet jest to niewykonalne, gdyż za zmienne należałoby podstawiać zbiory.

$SAT(\mu,\sum)$ zbioru $\sum$. Przyporządkowania tego dokonujemy za pomocą funkcji D^U w następujący sposób indukcyjny (dalej w sytuacjach, gdy nie będzie to powodować niejednoznaczności, będziemy pisać po prostu D zamiast D^U): dla $\underline{S},\underline{P}$ z $\mathbb{T}$ oraz σ,σ_1,σ_2 z $\sum$

ex$\underline{S}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\neq\emptyset$

ex!$\underline{S}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})=1$

sol$\underline{S}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})\leq 1$

$\underline{S}$a$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$

$\underline{S}$a*$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\neq\emptyset$ i $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$

$\underline{S}$i$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})\neq\emptyset$

$\underline{S}$e$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=\emptyset$

$\underline{S}$e*$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\neq\emptyset$ i $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=\emptyset$

$\underline{S}$e**$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\neq\emptyset\neq D(\underline{P})$ i $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=\emptyset$

$\underline{S}$o$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})\setminus D(\underline{P})\neq\emptyset$

$\underline{S}\equiv\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $D(\underline{S})=D(\underline{P})$

$\underline{S}\varepsilon\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})=1$ i $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$

$\underline{S}\bar{\varepsilon}\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})=1$ i $D(\underline{S})\setminus D(\underline{P})\neq\emptyset$

$\underline{S}=\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})=1$ i $D(\underline{S})=D(\underline{P})$

$\underline{S}$i!$\underline{P}$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw Card $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=1$

$\neg\sigma$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\sigma\notin SAT(\mu,\sum)$

$\sigma_1\wedge\sigma_2$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\sigma_1\in SAT(\mu,\sum)$ i $\sigma_2\in SAT(\mu,\sum)$

$\sigma_1\vee\sigma_2$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\sigma_1\in SAT(\mu,\sum)$ lub $\sigma_2\in SAT(\mu,\sum)$

$\sigma_1\Rightarrow\sigma_2$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\sigma_1\notin SAT(\mu,\sum)$ lub $\sigma_2\in SAT(\mu,\sum)$

$\sigma_1\Leftrightarrow\sigma_2$ $\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\sigma_1,\sigma_2\in SAT(\mu,\sum)$ lub $\sigma_1,\sigma_2\notin SAT(\mu,\sum)$

Card $D(\underline{S})$ to ilość elementów (moc) zbioru $D(\underline{S})$. Zbiór $SAT(\mu,\sum)$ nazywamy zbiorem formuł z $\sum$ spełnionych w modelu μ.

2.4.Tautologie w ujęciu teoriomnogościowym. Podamy teraz określenie tautologii w terminach teorii mnogości (dokładniej: używając modeli dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$):

formuła σ z $\sum$ jest tautologią wtw każdy model spełnia formułę σ.

Tautologie w ujęciu teoriomnogościowym nazwać możemy tautologiami modelowymi. Przyjmijmy oznaczenie TAUT($\sum$) dla zbioru wszystkich tautologii modelowych z $\sum$. W §4. porównamy ten zbiór ze zbiorem tautologii w ujęciu leksykalnym, zaś w §3. - ze zbiorem tautologii monadycznego rachunku predykatów z identycznością.

§3. Porównanie zbioru TAUT($\sum$) ze zbiorem tautologii monadycznego rachunku predykatów z identycznością

Porównanie to będzie przydatne do pokazania zakresowej równoważności obu przedstawionych powyżej definicji tautologii.

Na początek zbudujemy zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ złożony z formuł zdaniowych, w których będą występować następujące symbole: kwantyfikator ogólny $\forall$, kwantyfikator szczegółowy $\exists$, zmienne indywiduowe z przeliczalnego zbioru $\mathbb{VAR}:=\{x, y, x_1, y_1, x_2,\ldots\}$, symbole występujące w termach z $\mathbb{T}$ (tj. zmienne z $\mathbb{ZM}$, symbole z $\mathbb{SN}$ i nawiasy) oraz predykat identyczności = (używanie tego samego symbolu dla predykatu identyczności oraz dla funktora omawianego w 2.3. rozdz. I, nie spowoduje komplikacji, gdyż symbol = w pierwszym przypadku łączony będzie jedynie ze zmiennymi z $\mathbb{VAR}$, zaś w drugim przypadku - jedynie ze zmiennymi z $\mathbb{ZM}$). Za pomocą kwantyfikatorów, predykatu identyczności oraz zmiennych indywiduowych możemy wyeliminować symbole należące do zbioru $\mathbb{S}$. Jako zmiennych syntaktycznych przebiegających zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ używać będziemy liter φ oraz ψ (z indeksem bądź bez), zaś dla elementów zbioru $\mathbb{VAR}$ - liter $\underline{x}$ oraz $\underline{y}$. Zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ jest najmniejszym zbiorem spełniającym poniższe warunki:

- jeżeli $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$, to $\underline{x}est\underline{S} \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$
- jeżeli $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{VAR}$, to $\underline{x}=\underline{y} \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$
- jeżeli $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\varphi \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, to $\forall\underline{x}\varphi$ i $\exists\underline{x}\varphi$ należ do $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$

- jeżeli $\varphi \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, to $\neg\varphi \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$
- jeżeli $\varphi,\psi \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ i $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, to $(\varphi\S\psi) \in \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$

Fragment est$\underline{S}$ w formule atomowej $\underline{x}$est$\underline{S}$ (dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$) reprezentuje jednoargumentowe predykaty zbudowane ze spójki *jest* połączonej z pewną nazwą generalną reprezentowaną przez term $\underline{S}$.

Zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ zdefiniujemy podobnie jak zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ zamieniając jedynie w pierwszym warunku definicji zbiór $\mathbb{T}$ na zbiór $\mathbb{ZM}$. Mamy oczywiście $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}} \subset \Phi_{=}^{\mathbb{T}}$. Dla obu zbiorów możemy zdefiniować kwantyfikator jednostkowy $\exists!$ - po prostu traktujemy formułę $\exists!\underline{x}\varphi(\underline{x})$ jako skrót formuły $\exists\underline{x}\varphi(\underline{x}) \wedge \forall\underline{x}\forall\underline{y}((\varphi(\underline{x}) \wedge \varphi(\underline{y})) \Rightarrow \underline{x}=\underline{y})$, gdzie $\underline{x}\neq\underline{y}$ i nie występuje dodatkowe wiązanie tych zmiennych przez kwantyfikatory.

Zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ możemy utożsamić ze zbiorem $MRP_{=}$ formuł monadycznego rachunku predykatów z identocznościową. Oczywiście, kształt zmiennych reprezentujących jednoargumentowe predykaty jest nieistotny. Zatem możemy przyjąć, że $\mathbb{ZM}$ jest zbiorem zmiennych reprezentujących wszystkie jednoargumentowe predykaty. Zbiór $MRP_{=}$ zdefiniujemy podobnie jak zbiór $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ (odp. $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$) zmieniając jedynie pierwszy warunek definicji na:

- jeżeli $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{ZM}$, to $\underline{S}\underline{x} \in MRP_{=}$

Oczywiście w pozostałych warunkach zmieniamy $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ na $MRP_{=}$. Formułę φ z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ utożsamiamy z taką formułą z $MRP_{=}$, która powstaje z φ po zastąpieniu każdego egzemplarza $\underline{x}$est$\underline{S}$ egzemplarzem formuły $\underline{S}\underline{x}$.

3.1.Tłumaczenie formuł z $\sum$ na formuły z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$. Na zbiorze $\sum$ określamy w sposób rekurencyjny funkcję t_1 przyjmującą wartości w zbiorze $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ (funkcja tłumaczenia z $\sum$ na $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$):

$t_1(ex\underline{S}) = \exists x\ x\text{est}\underline{S}$

$t_1(ex!\underline{S}) = \exists!x\ x\text{est}\underline{S}$

$t_1(sol\underline{S}) = \forall x\forall y((x\text{est}\underline{S} \wedge y\text{est}\underline{S}) \Rightarrow x=y)$

$t_1(\underline{S}a\underline{P}) = \forall x(x\text{est}\underline{S} \Rightarrow x\text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}a^{*}\underline{P}) = \exists x\ x\text{est}\underline{S} \wedge \forall x(x\text{est}\underline{S} \Rightarrow x\text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}i\underline{P}) = \exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e\underline{P}) = \neg\exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e'\underline{P}) = \exists x\ \text{est}\underline{S} \wedge \neg\exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e''\underline{P}) = \exists x\ \text{est}\underline{S} \wedge \exists x\ \text{est}\underline{P} \wedge \neg\exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}o\underline{P}) = \exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \neg\text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\equiv\underline{P}) = \forall x(\text{est}\underline{S} \Leftrightarrow \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\varepsilon\underline{P}) = \exists!x\ \text{est}\underline{S} \wedge \exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\bar{\varepsilon}\underline{P}) = \exists!x\ \text{est}\underline{S} \wedge \neg\exists x(\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}=\underline{P}) = \exists!x\ \text{est}\underline{S} \wedge \forall x(\text{est}\underline{S} \Leftrightarrow \text{est}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}i!\underline{P}) = \exists!x\ (\text{est}\underline{S} \wedge \text{est}\underline{P})$

$t_1(\neg\sigma) = \neg t_1(\sigma)$

$t_1(\sigma_1 \S\ \sigma_2) = (t_1(\sigma_1)\ \S\ t_1(\sigma_2))$ dla $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Niech $\mu=(U,d)$ będzie dowolnym modelem dla liter z $\mathbb{ZM}$. Wartościowaniem zmiennych z $\mathbb{VAR}$ w zbiorze U jest dowolna funkcja określona na zbiorze $\mathbb{VAR}$ i przyjmująca wartości w zbiorze U. W sposób indukcyjny definiujemy zbiór $\text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ formuł z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ spełnionych w modelu μ przez wartościowanie $w:\mathbb{VAR} \to U$:

$\underline{x}\text{est}\underline{S} \in \text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $w(\underline{x}) \in D(\underline{S})$, dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$

$\underline{x}=\underline{y} \in \text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $w(\underline{x})=w(\underline{y})$, dla $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{VAR}$

dla pozostałych formuł - używając klasycznej interpretacji spójników zdaniowych i kwantyfikatorów.

Zbiór $\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ formuł spełnionych w modelu μ składa się z tych i tylko tych formuł należących do $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, które są spełnione przez każde wartościowanie zmiennych z $\mathbb{VAR}$ w modelu μ. Ponadto, niech $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ będzie zbiorem złożonym z tych i tylko tych formuł należących do $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, które są spełnione w każdym modelu dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$. Zachodzi oczywiste

STWIERDZENIE 1. Dla dowolnego σ z $\sum$:

(i) dla każdego modelu μ: $\sigma \in \text{SAT}(\mu,\sum)$ wtw $t_1(\sigma) \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$

(ii) $\sigma \in \text{TAUT}(\sum)$ wtw $t_1(\sigma) \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$.

Oczywiście, możemy zdefiniować inne funkcje tłumaczenia, dla których prawdziwy byłby odpowiednik powyższego stwierdzenia.

3.2.Tłumaczenie formuł z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ na formuły z $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Na zbiorze $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ określamy w sposób rekurencyjny funtcję t_2 przyjmującą wartości w zbiorze $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ (funkcję tłumaczenia z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ na $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$):

$t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) = \underline{x}\text{est}\underline{S}$ dla $\underline{S} \in \mathbb{ZM}$ i $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$

$t_2(\underline{x}\text{est}V) = \underline{x}=\underline{x}$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$

$t_2(\underline{x}\text{est}(\underline{S}+\underline{P})) = (t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) \vee t_2(\underline{x}\text{est}\underline{P}))$ dla $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$

$t_2(\underline{x}\text{est}(\underline{S}\cdot\underline{P})) = (t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) \wedge t_2(\underline{x}\text{est}\underline{P}))$ dla $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$

$t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}') = \neg t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S})$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$

$t_2(k\underline{x}\varphi) = k\underline{x}t_2(\varphi)$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $k \in \{\forall, \exists\}$

$t_2(\neg\varphi) = \neg t_2(\varphi)$

$t_2(\varphi \S \psi) = (t_2(\varphi) \S t_2(\psi))$ dla $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Przyjmijmy, że $\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}) := \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}}) \cap \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ oraz $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}) := \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}}) \cap \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Zachodzi oczywiste stwierdzenie:

STWIERDZENIE 2. Dla dowolnego φ z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$:

(i) dla każdego μ: $\varphi \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $t_2(\varphi) \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$

(ii) $\varphi \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $t_2(\varphi) \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$.

3.3.Tłumaczenie formuł z $\sum$ na formuły z $\text{MRP}_{=}$. W standardowy sposób określamy zbiór $\text{SAT}(\mu,\text{MRP}_{=})$ formuł z $\text{MRP}_{=}$ spełnionych w modelu μ oraz zbiór $\text{TAUT}(\text{MRP}_{=})$ tautologii monadycznego rachunku predykatów z identycznością, tj. formuł z $\text{MRP}_{=}$ spełnionych w każdym modelu. Oczywiste jest, że dana formuła należy do $\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$ (odp. $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$) wtw utożsamiana z nią formuła z $\text{MRP}_{=}$ należy do $\text{SAT}(\mu,\text{MRP}_{=})$ (odp. $\text{TAUT}(\text{MRP}_{=})$).

Złożenie $t_2 \circ t_1 : \sum \to \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ jest funkcją tłumaczenia z $\sum$ na $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Dla dowolnego σ z $\sum$ niech $\mathbf{t}(\sigma)$ będzie formułą należącą do $\text{MRP}_{=}$, z którą utożsamiamy formułę $t_2(t_1(\sigma))$. Ze stwierdzeń 1, 2 oraz uwagi poprzedniego akapitu wynika:

$t_1(\underline{S}i\underline{P}) = \exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e\underline{P}) = \neg\exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e^{\cdot}\underline{P}) = \exists x\ \text{xest}\underline{S} \wedge \neg\exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}e^{\cdot\cdot}\underline{P}) = \exists x\ \text{xest}\underline{S} \wedge \exists x\ \text{xest}\underline{P} \wedge \neg\exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}o\underline{P}) = \exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \neg\text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\equiv\underline{P}) = \forall x(\text{xest}\underline{S} \Leftrightarrow \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\varepsilon\underline{P}) = \exists!x\ \text{xest}\underline{S} \wedge \exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}\bar{\varepsilon}\underline{P}) = \exists!x\ \text{xest}\underline{S} \wedge \neg\exists x(\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}=\underline{P}) = \exists!x\ \text{xest}\underline{S} \wedge \forall x(\text{xest}\underline{S} \Leftrightarrow \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\underline{S}i!\underline{P}) = \exists!x\ (\text{xest}\underline{S} \wedge \text{xest}\underline{P})$

$t_1(\neg\sigma) = \neg t_1(\sigma)$

$t_1(\sigma_1\ \S\ \sigma_2) = (t_1(\sigma_1)\ \S\ t_1(\sigma_2))$ dla $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Niech $\mu=(U,d)$ będzie dowolnym modelem dla liter z $\mathbb{ZM}$. Wartościowaniem zmiennych z $\mathbb{VAR}$ w zbiorze U jest dowolna funkcja określona na zbiorze $\mathbb{VAR}$ i przyjmująca wartości w zbiorze U. W sposób indukcyjny definiujemy zbiór $\text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ formuł z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ spełnionych w modelu μ przez wartościowanie $w:\mathbb{VAR} \to U$:

$\underline{x}\text{est}\underline{S} \in \text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $w(\underline{x}) \in D(\underline{S})$, dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$

$\underline{x}=\underline{y} \in \text{sat}(\mu,w,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $w(\underline{x})=w(\underline{y})$, dla $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{VAR}$

dla pozostałych formuł - używając klasycznej interpretacji spójników zdaniowych i kwantyfikatorów.

Zbiór $\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ formuł spełnionych w modelu μ składa się z tych i tylko tych formuł należących do $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, które są spełnione przez każde wartościowanie zmiennych z $\mathbb{VAR}$ w modelu μ. Ponadto, niech $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ będzie zbiorem złożonym z tych i tylko tych formuł należących do $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$, które są spełnione w każdym modelu dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$. Zachodzi oczywiste

STWIERDZENIE 1. Dla dowolnego σ z $\sum$:

(i) dla każdego modelu μ: $\sigma \in \text{SAT}(\mu,\sum)$ wtw $t_1(\sigma) \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$

(ii) $\sigma \in \text{TAUT}(\sum)$ wtw $t_1(\sigma) \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$.

Oczywiście, możemy zdefiniować inne funkcje tłumaczenia, dla których prawdziwy byłby odpowiednik powyższego stwierdzenia.

3.2.Tłumaczenie formuł z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ na formuły z $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Na zbiorze $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ określamy w sposób rekurencyjny funtcję t_2 przyjmującą wartości w zbiorze $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ (funkcję tłumaczenia z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$ na $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$):

$t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) = \underline{x}\text{est}\underline{S}$ dla $\underline{S} \in \mathbb{ZM}$ i $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$

$t_2(\underline{x}\text{est}V) = \underline{x}=\underline{x}$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$

$t_2(\underline{x}\text{est}(\underline{S}+\underline{P})) = (t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) \vee t_2(\underline{x}\text{est}\underline{P}))$ dla $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$

$t_2(\underline{x}\text{est}(\underline{S}\cdot\underline{P})) = (t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}) \wedge t_2(\underline{x}\text{est}\underline{P}))$ dla $\underline{S},\underline{P} \in \mathbb{T}$

$t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S}') = \neg t_2(\underline{x}\text{est}\underline{S})$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $\underline{S} \in \mathbb{T}$

$t_2(k\underline{x}\varphi) = k\underline{x}t_2(\varphi)$ dla $\underline{x} \in \mathbb{VAR}$ i $k \in \{\forall, \exists\}$

$t_2(\neg\varphi) = \neg t_2(\varphi)$

$t_2(\varphi\S\psi) = (t_2(\varphi)\S t_2(\psi))$ dla $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Przyjmijmy, że

$\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}) := \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}}) \cap \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ oraz $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}) := \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}}) \cap \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Zachodzi oczywiste stwierdzenie:

STWIERDZENIE 2. Dla dowolnego φ z $\Phi_{=}^{\mathbb{T}}$:

(i) dla każdego μ: $\varphi \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $t_2(\varphi) \in \text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$

(ii) $\varphi \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{T}})$ wtw $t_2(\varphi) \in \text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$.

3.3.Tłumaczenie formuł z $\sum$ na formuły z $\text{MRP}_{=}$. W standardowy sposób określamy zbiór $\text{SAT}(\mu,\text{MRP}_{=})$ formuł z $\text{MRP}_{=}$ spełnionych w modelu μ oraz zbiór $\text{TAUT}(\text{MRP}_{=})$ tautologii monadycznego rachunku predykatów z identycznością, tj. formuł z $\text{MRP}_{=}$ spełnionych w każdym modelu. Oczywiste jest, że dana formuła należy do $\text{SAT}(\mu,\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$ (odp. $\text{TAUT}(\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}})$) wtw utożsamiana z nią formuła z $\text{MRP}_{=}$ należy do $\text{SAT}(\mu,\text{MRP}_{=})$ (odp. $\text{TAUT}(\text{MRP}_{=})$).

Złożenie $t_2 \circ t_1 : \sum \to \Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$ jest funkcją tłumaczenia z $\sum$ na $\Phi_{=}^{\mathbb{ZM}}$. Dla dowolnego σ z $\sum$ niech $t(\sigma)$ będzie formułą należącą do $\text{MRP}_{=}$, z którą utożsamiamy formułę $t_2(t_1(\sigma))$. Ze stwierdzeń 1, 2 oraz uwagi poprzedniego akapitu wynika:

STWIERDZENIE 3. Dla dowolnego σ z $\sum$:

(i) dla każdego μ: $\sigma \in SAT(\mu,\sum)$ wtw $t(\sigma) \in SAT(\mu,MRP_=)$

(ii)[9] $\sigma \in TAUT(\sum)$ wtw $t(\sigma) \in TAUT(MRP_=)$.

§4. Porównanie obu sposobów definiowania tautologii

Widoczna różnica pomiędzy definicją tautologii z 1.2. a definicją tautologii z 2.4. polega na tym, że ta pierwsza mówiła o wszystkich podstawieniach nazw generalnych, podczas gdy druga mówi o wszystkich przyporządkowaniach zbiorów. W paragrafie tym spróbujemy oszacować tę różnicę.

Pewną marginesową różnicę stanowi zmienność U : pierwsza definicja zakładała, że język, którego nazwy są podstawiane za zmienne, jest całkowicie zinterpretowany i nie pozostawia żadnej możliwości wyboru zakresu przedmiotów. Jeżeli chodzi o postulat niepustości U, to jest to czysto techniczne udogodnienie, a nie żaden filozoficzny dogmat konieczności istnienia (analogiczna sytuacja występuje w rachunku predykatów). Odrzucamy puste uniwersum, aby nie odrzucić wielu formuł, które są przy niepustym uniwersum tautologiami (np. exS $\vee$ exS', exV, ViV, $\neg$(S$\equiv$S'), $\neg$VaV').

Rozważmy teraz podstawową różnicę: różnicę pomiędzy przyporządkowaniem zbiorów i podstawianiem nazw generalnych. Z jednej strony zauważmy, że każdej nazwie generalnej możemy

[9] Ponieważ zbiór TAUT(MPR=) jest rozstrzygalny i funkcja tłumaczenia t podana jest w sposób efektywny, więc na mocy tego stwierdzenia również rozstrzygalny jest zbiór TAUT($\sum$). W rozprawie doktorskiej rozstrzygalność tego zbioru udowodniono także w inny sposób, bez korzystania z rozstrzygalności zbioru TAUT(MPR=). Mianowicie, rozstrzygalność TAUT($\sum$) wynika z udowodnionego lematu, w którym podano skończone oszacowanie górne mocy modeli weryfikujących daną formułę.

przyporządkować jakiś zbiór będący jej zakresem. Stąd wyciągamy wniosek, że każda formuła będąca tautologią w ujęciu teoriomnogościowym jest również tautologią w ujęciu leksykalnym. Istotnie, mając konkretne podstawienie $^\circ$, możemy każdej zmiennej $\underline{S}$ przyporządkować w sposób jednoznaczny zbiór będący zakresem nazwy $\underline{S}^\circ$. Zatem podstawienie konkretne $^\circ$wyznacza model μ° o uniwersum $U^\circ := \bigcup$ {zakres nazwy $\underline{S}^\circ$: $\underline{S} \in ZM$} i funkcji denotacji $d^\circ(\underline{S}) :=$ zakres nazwy $\underline{S}^\circ$, dla $\underline{S} \in ZM$. Na mocy warunków prawdziwości zdań i definicji spełniania otrzymujemy, że dla σ z $\sum$: zdanie $sub^\circ(\sigma)$ jest prawdziwe wtw $\sigma \in SAT(\mu^\circ,\sum)$. Stąd otrzymujemy, że jeżeli $\sigma \in TAUT(\sum)$, to dla dowolnego podstawienia $^\circ$ zdanie $sub^\circ(\sigma)$ jest prawdziwe.

Z drugiej strony, gdyby każdy zbiór był wyznaczony przez jakąś nazwę generalną (jako jej zakres), to można by udowodnić podobnie jak wyżej, że również każda formuła będąca tautologią w ujęciu leksykalnym jest tautologią w ujęciu teoriomnogościowym. Zatem podstawowa różnica byłaby nieistotna. Jednak w rzeczywistości brakuje nam nazw; nie każdemu zbiorowi możemy przyporządkować taką nazwę generalną, której byłby on zakresem. Spowodowane jest to tym, iż przy nieprzeliczalnej ilości zbiorów mamy jedynie przeliczalną ilość nazw generalnych[10].

Ostatnio omówiona rozbieżność między zbiorami a nazwami generalnymi może skłonić do przypuszczenia, że istnieje też rozbieżność pomiędzy dwiema definicjami tautologii. Jednak tak nie

[10] Nazwy każdego języka dzielą się bowiem na proste i złożone. Nazw prostych jest zawsze skończona liczba, nazwy złożone są skończonymi kombinacjemi nazw prostych, wobec tego wszystkich nazw możliwych jest liczba przeliczalna" - jest to pogląd Kazimierza Ajdukiewicza przedstawiony w "Sprawozdaniu z działalności Seminarium Pracowni Logiki Polskiej Akademii Nauk za IV kwartał 1955r." zamieszczonym w Studia Logica V, rok 1957, s. 138.

jest, brak nazw generalnych nie ma żadnego wpływu na definicję tautologii, jeżeli tylko język, którego nazwy podstawiamy za zmienne, jest dostatecznie bogaty dla elementarnej teorii liczb. W takim języku dowolna formuła, której każdy substytut jest prawdziwy, będzie również spełniona przez dowolny model.

Żądanie aby język naturalny był dostatecznie bogaty dla elementarnej teorii liczb nie jest wygórowane. Elementarna teoria liczb obejmuje tylko to, co można powiedzieć o liczbach naturalnych w terminach dodawania, mnożenia, identyczności, spójników zdaniowych, kwantyfikatorów ze zmiennymi przebiegającymi zbiór liczb naturalnych i z użyciem nazw indywidualnych poszczególnych liczb; bez żadnych zbiorów. Żądanie to przedstawia się następująco: dla każdej formuły elementarnej teorii liczb z jedną zmienną wolną istnieje w języku naturalnym taka nazwa generalna, której zakres pokrywa się ze zbiorem liczb naturalnych spełniających tę formułę [11].

W dowodzie tego, iż przedstawione żądanie jest wystarczające dla wykazania zakresowej równoważności obu definicji, korzystać będziemy ze znanego wyniku Hilberta i Bernaysa z metateorii rachunku predykatów. Wykazali oni, że każda formuła rachunku predykatów (z identycznością), która jest spełniona w jakimś modelu, jest też spełniona w takim modelu, w którym uniwersum jest zbiorem liczb naturalnych, zaś relacje (zbiory to relacje unarne) przyporządkowane zmiennym predykatowym są wyznaczone przez zdania otwarte elementarnej teorii liczb.

Niech σ będzie dowolną formułą z $\sum$ spełnioną w pewnym modelu dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$. Na mocy stwierdzenia 3 domknięta formuła $t(\sigma)$

[11] Oczywiście, zbiór formuł elementarnej teorii liczb jest przeliczalny.

należąca do $MRP_{=}$, jest również spełniona w tym modelu. Stąd na mocy wyniku Hilberta i Bernaysa istnieje model (N,d) spełniający formułę $t(\sigma)$, w którym $d(\underline{S})=\{n\in N : \alpha_{\underline{S}}(n)\}$ dla jakiejś formuły $\alpha_{\underline{S}}(n)$ elementarnej teorii liczb ($\underline{S}\in\mathbb{ZM}$). Jeżeli teraz w domkniętej formule $t(\sigma)$ podstawimy za każdy egzemplarz formuły atomowej $\underline{S}x$ egzemplarz formuły $\alpha_{\underline{S}}(\underline{x})$, to otrzymamy prawdziwe zdanie elementarnej teorii liczb (dokładniej: prawdziwe w jej modelu standardowym)[12]. Jednak nic się nie popsuje, jeżeli wartościami zmiennych z $\mathbb{VAR}$ będą, oprócz liczb naturalnych, jakieś inne przedmioty[13]. Na mocy przyjętego »dostatecznego bogactwa języka naturalnego«, dla dowolnej zmiennej $\underline{S}$ istnieje taka nazwa generalna, której zakresem jest zbiór $\{n\in N : \alpha_{\underline{S}}(n)\}$. Podstawienie tych nazw w formule σ da zdanie prawdziwe. Biorąc pod uwagę powyższe rozumowanie na mocy transpozycji otrzymujemy: jeżeli σ ma każdy substytut konkretny fałszywy, to σ nie jest spełniona w żadnym modelu. Lecz skoro ostatnie stwierdzenie było prawdziwe dla wszystkich formuł z $\sum$, więc mówiąc o danej formule możemy wykorzystać go również do negacji tej formuły. Otrzymamy wtedy: dla $\sigma \in \sum$

jeżeli każdy substytut konkretny formuły σ jest prawdziwy, to σ jest spełniona w każdym modelu.

§5. Zaangażowanie ontologiczne logiki nazw

W paragrafie tym chciałbym omówić kwestię »zaangażowania ontologicznego« bezkwantyfikatorowego rachunku nazw, związanego z wprowadzoną semantyką teoriomnogościową.

[12] Zakładamy, że podstawienie zmiennej $\underline{X}$ byłoby dopuszczalne, gdyż łatwo można dokonać odpowiedniej zmiany zmiennych związanych.

[13] Można to pokazać wzorując się na rozważaniach z [29] s. 196.

Przyjmijmy, że *J* jest językiem naturalnym, którego nazwy generalne mają być podstawiane za zmienne z ZM. Uniwersum danego modelu ma reprezentować zbiór przedmiotów, które mogą być desygnatami nazw generalnych języka *J* (inaczej: wśród których mają występować wszystkie desygnaty nazw podstawianych za zmienne z ZM). Przypomnijmy, że wartościami funkcji denotacji mają być podzbiory uniwersum modelu. Jednak nie znaczy to, iż zakładamy, że do tego uniwersum mają należeć w ogóle jakieś zbiory. Propozycja związana z użyciem teoriomnogościowych modeli idzie w tym kierunku, żeby zbiorami (w tym również parami uporządkowanymi) operować wyłącznie w metajęzyku - zwykłym, niesformalizowanym języku, w którym opisujemy i rozważamy język *J* jak również zbiór termów i formuł zdaniowych bezkwantyfikatorowego rachunku nazw, oraz ich semantykę. Przykładowo, kiedy mówimy, że funkcja denotacji przyporządkowuje zmiennej S zbiór liczb naturalnych, nie musimy bynajmniej zakładać, że do uniwersum modelu (utożsamianego z dziedziną języka *J*) należy zbiór liczb naturalnych. Wystarczy przyjąć, że należą do niego poszczególne liczby naturalne. Zbiory należą do aparatury naszych badań nad językiem *J* oraz nad zbiorem formuł rachunku nazw, i to nam wystarcza. Użytkownik języka *J* jak również ten, który stosuje rachunek nazw do języka *J* (tj. wykorzystuje jego tautologie do stwierdzania związków wynikania zachodzących pomiędzy zdaniami języka *J*) nie musi przyjmować teoriomnogościowej ontologii. Przytoczmy tutaj słowa W.V.O.Quine'a z [27]: "Przywiązuję duże znaczenie do tradycyjnego rozróżnienia pomiędzy terminami ogólnymi [w polskiej literaturze: nazwami generalnymi; u Quine'a występują puste terminy ogólne, *A.P.*] i abstrakcyjnymi terminami indywiduowymi,... ma ono bowiem konsekwencje dla ontologii: posługiwanie się terminem ogólnym nie zobowiązuje nas jeszcze do wprowadzenia odpowiedniego przedmiotu abstrakcyjnego do naszej

ontologii..." (s. 109). W języku *J* zakładamy jedynie istnienie nazw generalnych (w terminologii Quine'a - terminów ogólnych). "Istnienie termiów ogólnych jest - niezależnie od okoliczności ich wprowadzenia - faktem wielce pomyślnym. Bez tych terminów język byłby niemożliwy, a myślenie bardzo prymitywne." ([27], s. 111).

Rozdział III

Fragmentaryczne teorie bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

§1. Formuły fragmentarycznych teorii bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

1.1.Termy. Przyjmujemy oznaczenia zbiorów symboli podane w 4.2. rozdz.I. Niech $sn \subset \mathbb{SN}$. Wtedy zbiorem formuł nazwowych (inaczej: termów) wyznaczonym przez zbiór sn jest najmniejszy zbiór T^{sn} zawierający zbiór $\mathbb{ZM} \cup (sn \cap \{V\})$ i spełniający poniższe warunki:

- jeżeli $\underline{S} \in T^{sn}$ i $' \in sn$, to $\underline{S}' \in T^{sn}$
- jeżeli $\underline{S},\underline{P} \in T^{sn}$ i $\S \in sn \cap \mathbb{FN}^2$, to $(\underline{S}\S\underline{P}) \in T^{sn}$

Zauważmy, że gdy $sn=\emptyset$, to $T^{sn}=\mathbb{ZM}$; gdy $sn=\{V\}$, to $T^{sn}=\mathbb{ZM} \cup \{V\}$; zaś gdy $sn=\mathbb{SN}$ mamy $T^{sn}=\mathbb{T}$. W ogólnym przypadku T^{sn} składa się z tych i tylko tych termów należących do $\mathbb{T}$, w których nie występują symbole ze zbioru $\mathbb{SN} \setminus sn$.

1.2.Formuły zdaniowe. Niech T^{sn} będzie zbiorem termów wyznaczonym przez zbiór $sn \subset \mathbb{SN}$, zaś $fz \subset \mathbb{FZ}$, przy czym $fz \cap \mathbb{FZ}^2 \neq \emptyset$. Wtedy zbiorem formuł zdaniowych wyznaczonym przez zbiór $s = sn \cup fz$ jest najmniejszy zbiór Σ^s spełniający poniższe warunki:

- jeżeli $\underline{S} \in T^{sn}$ i $\S \in fz \cap \mathbb{FZ}^1$, to $\S\underline{S} \in \Sigma^s$
- jeżeli $\underline{S},\underline{P} \in T^{sn}$ i $\S \in fz \cap \mathbb{FZ}^2$, to $\underline{S}\S\underline{P} \in \Sigma^s$
- jeżeli $\sigma \in \Sigma^s$, to $\neg\sigma \in \Sigma^s$
- jeżeli $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma^s$ i $\S \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, to $(\sigma_1\S\sigma_2) \in \Sigma^s$

Σ^s składa się z tych i tylko tych formuł należących do $\sum$, w których nie występują symbole ze zbioru $\mathbb{S} \setminus s$.

1.3.Oznaczenia. Przyjmijmy umowę, że litera T (odp. $\sum$) razem z odpowiednimi symbolami ze zbioru $\mathbb{SN}$ (odp. $\mathbb{S}$) występującymi jako indeksy górne, będzie nazwą zbioru termów (odp. formuł zdaniowych) wyznaczonego przez zbiór złożony z wymienionych symboli. Zatem nazwa $T^{\S_1,\ldots,\S_n}$ (odp. $\sum^{\S_1,\ldots,\S_n}$) oznacza zbiór termów (odp. formuł zdaniowych) wyznaczony przez zbiór $\{\S_1,\ldots,\S_n\}$, gdzie $n \geq 1$ oraz $\S_1,\ldots,\S_n \in \mathbb{SN}$ (odp. $\mathbb{S}$). Zgodnie z powyższą umową kolejność indeksów górnych jest obojętna oraz mamy przykładowo: T^V jest zbiorem termów wyznaczonym przez zbiór $\{V\}$, tj. zbiorem $\mathbb{ZM} \cup \{V\}$; $T^{V,+}$ jest zbiorem termów wyznaczonym przez zbiór $\{V, +\}$; $\sum^a$ jest zbiorem formuł wyznaczonym przez zbiór $\{a\}$; $\sum^{i,V,+}$ jest zbiorem formuł wyznaczonym przez zbiór $\{i, V, +\}$.

§2. Fragmentaryczne teorie bezkwantyfikatorowego rachunku nazw

Logika dysponuje bardzo ogólnym pojęciem teorii. Mianem tym określa się dowolny zbiór formuł zdaniowych X zawarty w pewnym zbiorze formuł Y oraz domknięty ze względu na jakąś operację konsekwencji w sensie Tarskiego, tzn. dla pewnej operacji $C:2^Y \to 2^Y$ spełniającej warunki: dla $Z,Z_1,Z_2 \subset Y$

a) $Z \subset C(Z)$

b) jeżeli $Z_1 \subset Z_2$, to $C(Z_1) \subset C(Z_2)$

c) $C(C(Z))=C(Z)$

mamy $C(X)=X$. Elementy zbioru X, to tezy (twierdzenia) teorii X; zatem w tym ujęciu teorię utożsamia się ze zbiorem jej tez. Można podać różne sposoby wyznaczania tez teorii X. Jednym z nich jest podanie jakiegoś systemu dedukcyjnego $\mathcal{D}_X$ teorii X[14], innym wskaza-

[14] Wzorując się na Carnapie odróżniamy teorię od jej systemu deduk-

nie odpowiedniej klasy modeli charakterystycznych teorii X.

Niech T^{sn} i Σ^S będę zbiorami określonymi w §1. W niniejszej pracy jako teorie logiczne interesować nas będą te podzbiory zbioru Σ^S, które są domknięte ze względu na podstawieniowo-odrywaniową operację konsekwencji Cn^S, którą określamy poniżej.

2.1.Podstawieniowo-odrywaniowa operacja konsekwencji Cn^S. Regułą nad zbiorem Σ^S jest dowolna relacja zawarta w iloczynie kartezjańskim $(\Sigma^S)^n$ przy dowolnie wybranym $n>1$. W pracy tej będziemy często korzystać z dwóch reguł nad Σ^S : reguły odrywania $r_o^S \in (\Sigma^S)^3$ zdefiniowanej warunkiem

$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \in r_o^S$ wtw $\sigma_1=(\sigma_2\Rightarrow\sigma_3)$

oraz reguły $r_*^S \in (\Sigma^S)^2$ podstawienia termów z T^{sn} za zmienne, którą zdefiniujemy poniżej.

Jednoczesnym podstawieniem termów z T^{sn} za zmienne z $\mathbb{ZM}$ jest dowolna funkcja określona na $\mathbb{ZM}$ i przyjmująca wartości w T^{sn}. Funkcję $e:\mathbb{ZM}\to T^{sn}$ można rozszerzyć do endomorfizmu h^e: $T^{sn}\to T^{sn}$, który jest jednoznacznym homomorficznym rozszerzeniem funkcji e spełniającym następujące warunki rekurencyjne: $h^e(V)=V$, zaś dla pozostałych $\underline{S},\underline{P}$ z T^{sn}, gdy $' \in sn$, to $h^e(\underline{S}')=h^e(\underline{S})'$, gdy $\S \in sn\cap\mathbb{FN}^2$, to $h^e(\underline{S}\S\underline{P})=(h^e(\underline{S})\S h^e(\underline{P}))$. Następnie rozszerzamy w sposób jednoznaczny funkcję h^e na zbiór Σ^S, przy czym $h^e(\Sigma^S)\subset\Sigma^S$, za pomocą warunków rekurencyjnych: gdy $\S\in sn\cap\mathbb{FZ}^1$, to $h^e(\S\underline{S})=\S h^e(\underline{S})$, gdy $\S\in sn\cap\mathbb{FZ}^2$, to $h^e(\underline{S}\S\underline{P})=h^e(\underline{S})\S h^e(\underline{P})$, $h^e(\neg\sigma)=\neg h^e(\sigma)$, gdy $\S\in\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, to $h^e(\sigma_1\S\sigma_2)=(h^e(\sigma_1)\S h^e(\sigma_2))$.

Możemy teraz zdefiniować regułę $r_*^S\in(\Sigma^S)^2$ warunkiem:

$(\sigma_1,\sigma_2)\in r_*^S$ wtw dla pewnego $e:\mathbb{ZM}\to T^{sn}$, $\sigma_2=h^e(\sigma_1)$

Mówimy, że zbiór $Y\subset\Sigma^S$ jest domknięty ze względu na regułę r

cyjnego. Dana teoria może mieć wiele systemów dedukcyjnych ([4], [5]).

nad Σ^S, symbolicznie $r(Y)$, wtw dla dowolnych $\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_k\in\Sigma^S$ jeżeli $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\sigma)\in r$, to warunek $\sigma_1,\ldots,\sigma_k\in Y$ pociąga $\sigma\in Y$. Połóżmy

$Cn^S(Z):=\bigcap\{Y\subset\Sigma^S : Z\subset Y \text{ i } r_o^S(Y) \text{ i } r_*^S(Y)\}$

tzn. $Cn^S(Z)$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór Z i domkniętym ze względu na reguły r_o^S i r_*^S. Oczywiście Cn^S jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego na zbiorze Σ^S.

2.2.Fragmentaryczne teorie. Teorię logiczną będącą podzbiorem zbioru Σ^S domkniętym ze względu na operację Cn^S nazywamy fragmentarycznym bezkwantyfikatorowym rachunkiem nazw. Oczywiście, $Cn^S(X)=X$ wtw $r_o^S(X)$ i $r_*^S(X)$. Rachunek X jest sprzeczny wtw $X=\Sigma^S$.

Łatwo zauważyć, że $r_o^S(TAUT(\sum))$ i $r_*^S(TAUT(\sum))$, oraz $TAUT(\sum)\neq\sum$.

2.3.Teoria $KRZ(\Sigma^S)$. Przyjmijmy, iż zbiorem formuł klasycznego rachunku zdań jest najmniejszy zbiór zawierający zbiór zmiennych zdaniowych oraz domknięty na poprzedzanie formuł symbolem $\neg$ i łączenie za pomocą stałych $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ oraz nawiasów. Niech $KRZ(\Sigma^S)$ będzie zbiorem formuł z Σ^S, które są podstawieniami jakichkolwiek tautologii klasycznego rachunku zdań. Oczywiście $r_o^S(KRZ(\Sigma^S))$ i $r_*^S(KRZ(\Sigma^S))$ oraz $KRZ(\Sigma^S)\neq\Sigma^S$.

§3. Teoria $TAUT(\Sigma^S)$

Niech T^{sn} oraz Σ^S będą zbiorami określonymi w §1.

3.1.Zbiór $SAT(\mu,\Sigma^S)$. Dla dowolnego modelu μ przyjmijmy:

$SAT(\mu,\Sigma^S):=SAT(\mu,\sum)\cap\Sigma^S$

Zbiór ten można również określić w sposób równoważny rekurencyjnie, odrzucając z indukcyjnej definicji zbioru $SAT(\mu,\sum)$ warunki dotyczące formuł atomowych nie należących do Σ^S. Można przy tym ograniczyć przedłużenie funkcji denotacji do zbioru T^{sn}.

3.2.Zbiór $TAUT(\Sigma^S)$. Przyjmijmy $TAUT(\Sigma^S):=TAUT(\sum)\cap\Sigma^S$. Oczywiście $\sigma\in TAUT(\Sigma^S)$ wtw dla każdego modelu μ mamy $\sigma\in SAT(\mu,\Sigma^S)$. Zauważmy, że

$r_o^S(TAUT(\Sigma^S))$ i $r_*^S(TAUT(\Sigma^S))$, oraz $TAUT(\Sigma^S)\neq\Sigma^S$, czyli $TAUT(\Sigma^S)$ jest teorią[15].

§4. Puste uniwersum

Z teoretycznego punktu widzenia interesujące może być rozszerzenie klasy modeli dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$ o jeszcze jeden model (z pustym uniwersum) oraz zbadanie dla jakich $s\subset\mathbb{S}$ zbiór $TAUT(\Sigma^S)$ pokrywa się ze zbiorem formuł z Σ^S spełnionych w każdym modelu z rozszerzonej klasy.

4.1.Model z pustym uniwersum. Ponieważ $2^{\emptyset}=\{\emptyset\}$, więc istnieje dokładnie jedna funkcja określona na zbiorze $\mathbb{ZM}$ i przyjmująca wartości w zbiorze $\{\emptyset\}$. Tę funkcję stałą oznaczymy przez $d_\emptyset$. Dopuścimy jeszcze jeden model dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$. Połóżmy $\mu_\emptyset:=(\emptyset,d_\emptyset)$. Przedłużenie $D_\emptyset^\emptyset$ funkcji $d_\emptyset$ w modelu $\mu_\emptyset$ na zbiór $\mathbb{T}$, jest również funkcją stałą o wartości $\emptyset$ [16].

4.2.Spełnianie w modelu $\mu_\emptyset$. Zbiór $SAT(\mu_\emptyset,\sum)$ definiujemy w sposób rekurencyjny tak samo jak dla modeli o niepustym uniwersum (p.2.3. rozdz.II). Ponadto, dla odpowiedniego zbioru symboli $s\subset\mathbb{S}$ połóżmy $SAT(\mu_\emptyset,\Sigma^S):=SAT(\mu_\emptyset,\sum)\cap\Sigma^S$. Zbiór ten można również określić (w równoważny sposób) rekurencyjnie.

Zauważmy, że następujące formuły exV, ViV, exSvexS', $\neg$(S≡S'), Va'V oraz $\neg$VaV' nie należą do $SAT(\mu_\emptyset,\sum)$ choć należą do $TAUT(\sum)$.

4.3.Zbiór $TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$. Niech T^{sn} i Σ^S będą zbiorami określonymi w §1. Połóżmy $TAUT^\emptyset(\Sigma^S):=TAUT(\sum)\cap SAT(\mu_\emptyset,\Sigma^S)$. Zatem $TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$ składa się z formuł należących do Σ^S, które spełnione są w każdym modelu dla zmiennych z $\mathbb{ZM}$.

Oczywiście $TAUT^\emptyset(\Sigma^S)\subset TAUT(\Sigma^S)$ oraz $r_o^S(TAUT^\emptyset(\Sigma^S))$ i $r_*^S(TAUT^\emptyset(\Sigma^S))$. Ponadto, bezpośrednio z określeń zbiorów $TAUT(\Sigma^S)$ i $TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$ wynika:

LEMAT 1. Jeżeli istnieje model μ_0 o niepustym uniwersum taki, że $SAT(\mu_0,\Sigma^S)=SAT(\mu_\emptyset,\Sigma^S)$, to $TAUT(\Sigma^S)=TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$.□

Z powyższego lematu otrzymujemy stwierdzenie:

STWIERDZENIE 4. Jeżeli $s\subset\{+,\cdot\}$, to $TAUT(\Sigma^S)=TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$.

DOWÓD: Niech U będzie dowolnym zbiorem niepustym. Przedłużenie $D_\emptyset^U$ funkcji $d_\emptyset$ w modelu $(U,d_\emptyset)$ na zbiór $\mathbb{T}$, przyjmuje na zbiorze T^{sn} jedynie wartość $\emptyset$, gdyż $\emptyset\cup\emptyset=\emptyset=\emptyset\cap\emptyset$. Stąd $D_\emptyset^U|_{T^{sn}}=D_\emptyset^\emptyset|_{T^{sn}}$. Zatem $SAT((U,d_\emptyset),\Sigma^S)=SAT(\mu_\emptyset,\Sigma^S)$ i z lematu 1 otrzymujemy dowodzoną równość.□

Powyższego stwierdzenia nie można odwrócić, gdyż nie zachodzi nawet (słabsza) implikacja: jeżeli $TAUT(\Sigma^S)=TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$, to nieprawda, że zarówno $V\in sn$ i $'\in sn$. Świadczy o tym równość

$TAUT(\sum^{\varepsilon,V,+,',\cdot})=TAUT^\emptyset(\sum^{\varepsilon,V,+,',\cdot})$, którą otrzymujemy z lematu 1 biorąc $\mu_0=(\{1,2\},d_\emptyset)$.

Z definicji spełniania wynika, iż $KRZ(\Sigma^S)\subset TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$. Ponadto dzięki założeniu $sn\cap\mathbb{FZ}^2\neq\emptyset$ mamy $KRZ(\Sigma^S)\neq TAUT^\emptyset(\Sigma^S)$, gdyż przykładowo formuły SaS, S≡S, Sa'P⇒Sa'S, SiP ⇔ PiS, SeP ⇔ PeS, $\neg$Se'S, $\neg$Se'S, $\neg$SoS, SεP⇒SεS, $\neg$S$\bar{\varepsilon}$S, S=P⇒P=S oraz Si!P ⇔ Pi!S należące do $TAUT(\sum)$, nie są podstawieniami żadnej tautologii klasycznego rachunku zdań.

§5. Pewne problemy logiki tradycyjnej

5.1.Sylogistyka Arystotelesa. Według Jana Łukasiewicza sylogistyka Arystotelesa (dotycząca zdań asertorycznych) była teorią związków logicznych zachodzących pomiędzy zdaniami kategorycznymi wymienio-

---

[15] Ponieważ $TAUT(\Sigma^s)=TAUT(\Sigma)\cap\Sigma^s$ oraz zbiory $TAUT(\Sigma)$ i Σ^s są rozstrzygalne, więc również rozstrzygalna jest teoria $TAUT(\Sigma^s)$. W rozprawie doktorskiej dla różnych s podano oszacowanie górne mocy uniwersum modeli weryfikujących formuły teorii $TAUT(\Sigma^s)$, mniejsze niż oszacowanie dla $TAUT(\Sigma)$ (przypis 9).

[16] Zauważmy, że dla każdego $U\neq\emptyset$: $D_\emptyset^U(\mathbb{T})=\{U,\emptyset\}\neq\{\emptyset\}$.

nymi w §1. rozdz.I. ([12], [13], [14]). Zatem możemy badać ją - w tym ujęciu - w zbiorze $\sum^{a,i,o,e}$. Jak wiadomo nie wszystkie prawa wyróżnione przez sylogistykę należą do TAUT($\sum^{a,i,o,e}$). Niektóre z nich przekształcają się w zdania fałszywe przy pewnych podstawieniach nazw pustych (np. SaP⇒SiP oraz SeP⇒SoP). Zatem sylogistyka na pewno nie dopuszczała podstawień nazw pustych za zmienne. Ale nie jest wyraźnie powiedziane, czy sylogistyka dopuszczała podstawienia wszystkich niepustych nazw generalnych (w tym jednostkowych), czy tylko nazw ogólnych. Łukasiewicz twierdził, że "Arystoteles nie określa nigdzie, co wolno za te zmienne podstawiać. Z przykładów wynika, że należy za nie podstawić tylko **nazwy ogólne**, jak *człowiek*, *biały*, *łabędź*. Sylogistyka Arystotelesa jest to więc pewien fragmentaryczny system logiki nazw, w którym nie są uwzględniane ani nazwy jednostkowe ani nazwy puste" ([13], s.221; podobne poglądy wyraża Łukasiewicz w [12] i [14]). Jednak z semantycznego punktu widzenia, wybór któregoś z powyższych rozwiązań jest sprawą zupełnie obojętną, gdyż - jak pokażemy w następnym paragrafie - dla dowolnej formuły σ z $\sum^{a,i,o,e}$ mamy:

σ jest prawdziwa przy każdym podstawieniu nazw niepustych wtw σ jest prawdziwa przy każdym podstawieniu nazw ogólnych.

Prawami sylogistyki Arystotelesa zdań asertorycznych (w ujęciu Łukasiewicza) są właśnie formuły z $\sum^{a,i,o,e}$ spełniające jedną ze stron powyższej równoważności.

5.2.Negacja przynazwowa w logice tradycyjnej. Jan Łukasiewicz uważał, że Arystoteles wykluczył z sylogistyki tzw. "terminy przeczące". Nie wchodząc w szczegóły historyczne, możemy przyjąć, że już w drugiej połowie XIX w. była opracowana pewna teoria dotycząca związków logicznych zachodzących pomiędzy zdaniami kategorycznymi uwzględniająca logiczne właściwości nagacji przynazwowej[17]. Rekonstrukcja tej teorii możliwa jest już w zbiorze $\sum^{a,i,o,e,'}$. W postaci systemu dedukcyjnego rachunku nazw dokonał jej A.Wedberg w [34]. Zbiór tez tego systemu pokrywa się ze zbiorem formuł z $\sum^{a,i,o,e,'}$ prawdziwych przy każdym podstawieniu tzw. nazw limitowanych, tj. nieuniwersalnych nazw niepustych ([34], [30], [3]). Jednak do nazw limitowanych należą wszystkie nazwy jednostkowe (o ile uniwersum wszystkich przedmiotów nie jest zbiorem jednoelementowym). Zatem i tutaj - z podobnych powodów jak w 5.1. - możemy zastanowić się nad dopuszczalnością podstawień jednostkowych nazw generalnych za zmienne. Jednak - podobnie jak w 5.1. - odrzucenie podstawień nazw jednostkowych niczego nie zmienia (z punktu widzenia zasobu praw), gdyż - jak pokażemy w następnym paragrafie - dla dowolnej formuły σ z $\sum^{a,i,o,e,'}$ mamy:

σ jest prawdziwa przy każdym podstawieniu nazw limitowanych wtw σ jest prawdziwa przy każdym podstawieniu nazw ogólnych, które nie oznaczają przynajmniej dwóch przedmiotów.

Oczywiście, negacja nazwy limitowanej jest również nazwą limitowaną. Podobnie negacja nazwy ogólnej nie oznaczającej przynajmniej dwóch przedmiotów jest również nazwą ogólną nie oznaczającą przynajmniej dwóch przedmiotów. Dla nazw tego typu wybrałem krótki termin *nazwa ogólno-limitowana*.

§6. Spełnianie w zawężonych klasach modeli. Tautologiczność w sensie tradycyjnym

Niech T^{Sn} i Σ^{S} będą zbiorami określonymi w §1. Oznaczmy przez

[17] " W początkach XIX wieku ... oprócz 24 poprawnych trybów sylogistycznych obejmowała ona formuły obwersji, opozycji, konwersji oraz kontrapozycji ... inwersja ... wyróżniona została dopiero w drugiej połowie XIX wieku" - [3], s. 13

K klasę wszystkich modeli o niepustym uniwersum oraz przyjmijmy $K^{\emptyset}:=K\cup\{\mu_{\emptyset}\}$.

6.1.Ograniczenia przy podstawianiu nazw. Zawężenia klas wszystkich modeli. Podstawienie konkretne $^{\circ}$ nazw za zmienne nazwowe nazywamy podstawieniem nazw niepustych (odp. ogólnych, limitowanych, ogólno-limitowanych) wtw dla dowolnej zmiennej $\underline{S}$ z $\mathbb{ZM}$ nazwa $\underline{S}^{\circ}$ jest niepusta (odp. ogólna, limitowana, ogólno-limitowana). Z klasą podstawień nazw niepustych za zmienne związemy pewną podklasę K^{np} klasy K, określoną poniżej:

$K^{np}:=\{\mu=(U,d)\in K : \emptyset\notin d(\mathbb{ZM})\}$.

Podobnie, klasie podstawień nazw ogólnych za zmienne odpowiadać będzie podklasa K° klasy K określona poniżej:

$K^{\circ}:=\{\mu=(U,d)\in K$: dla każdego $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, Card $d(\underline{S})\geq 2\}$.

W punkcie 5.2. analizowaliśmy prawa logiki tradycyjnej z negacją przynazwową. Jak wiadomo, przy stosowaniu tych praw musimy ograniczyć się do nazw limitowanych. Słabsze ograniczenie, do nazw niepustych, byłoby niewystarczające, gdyż przykładowo z formuły $\neg S'aS$ (prawdziwej przy każdym podstawieniu nazw limitowanych) otrzymamy zdanie fałszywe, gdy za S podstawimy nazwę, której zakresem jest niepuste uniwersum. Klasie podstawień nazw limitowanych za zmienne odpowiadać będzie podklasa K^{l} klasy K określona poniżej:

$K^{l}:=\{\mu=(U,d)\in K : d(\mathbb{ZM})\subset 2^{U}\setminus\{U,\emptyset\}\}$.

Oczywiście, uniwersum modelu z K^{l} jest co najmniej dwuelementowe. Ograniczając w prawach logiki tradycyjnej z negacją przynazwową podstawienia nazw za zmienne do nazw ogólno-limitowanych, wprowadzimy podklasę K^{ol} klasy K:

$K^{ol}:=\{(U,d)\in K$: dla każdego $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, Card $d(\underline{S})\geq 2$ i Card $U\setminus d(\underline{S})\geq 2\}$

Uniwersum modelu z K^{ol} jest co najmniej czteroelementowe.

6.2.Zgodność termów z klasami modeli. Z dowolnie wybranego modelu $\mu=(U,d)$ i z dowolnego podstawienia $e:\mathbb{ZM}\to T^{sn}$ utwórzmy model

$\mu_e=(U,d)$, w którym $d_e(\underline{S}):=D^{U}(e(\underline{S}))$ dla $\underline{S}$ z $\mathbb{ZM}$. Stosując indukcję po termach, łatwo dowieść, iż dla każdego $\underline{S}$ z T^{sn} mamy

$D^{U}_{e}(\underline{S})=D^{U}(h^{e}(\underline{S}))$

gdzie h^{e} jest funkcją z T^{sn} w T^{sn}. Teraz, indukcyjnie po podformułach można pokazać, iż dla dowolnego σ z Σ^{S} zachodzi

(+) $\sigma\in SAT(\mu_e,\Sigma^{S})$ wtw $h^{e}(\sigma)\in SAT(\mu,\Sigma^{S})$

gdzie h^{e} jest funkcją z Σ^{S} w Σ^{S} (punkt 2.1).

Niech $K\subset K^{\emptyset}$. Mówimy, że zbiór termów T^{sn} jest zgodny z klasą K wtw dla dowolnego modelu $\mu\in K$ i dowolnego podstawienia $e:\mathbb{ZM}\to T^{sn}$ również $\mu_e\in K$. Łatwo udowodnić:

STWIERDZENIE 5.

(i) Dowolne z rozpatrywanych zbiorów termów są zgodne z klasami $K^{\emptyset}$ i K.

(ii) Niech K będzie jedną z klas K^{np}, K°, K^{l} bądź K^{ol}. Wtedy zbiór T^{sn} jest zgodny z klasą K wtw dla każdego modelu $(U,d)\in K$ zachodzi odpowiednio

a) $\emptyset\notin D^{U}(T^{sn})$

b) dla dowolnego $\underline{S}$ z T^{sn}, Card $D^{U}(\underline{S})\geq 2$

c) $D^{U}(T^{sn})\subset 2^{U}\setminus\{U,\emptyset\}$

d) dla każdego $\underline{S}$ z T^{sn}, Card $D^{U}(\underline{S})\geq 2$ i Card $U\setminus D^{U}(\underline{S})\geq 2$. □

Teraz łatwo zauważyć, iż jedynie zbiory $\mathbb{ZM}$, T^{V}, T^{+}, i $T^{V,+}$ są zgodne z klasą K^{np}. Identycznie jest dla klasy K°. Ponadto jedynie zbiory $\mathbb{ZM}$ i T' są zgodne z klasą K^{l}. Podobnie dla K^{ol}.

Dla $K\subset K^{\emptyset}$ przyjmijmy:

$SAT(K,\Sigma^{S}):=\bigcap\{SAT(\mu,\Sigma^{S}) : \mu\in K\}$.

Oczywiście, $SAT(K,\Sigma^{S})=TAUT(\Sigma^{S})$ i $SAT(K^{\emptyset},\Sigma^{S})=TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{S})$. Warunek zgodności zbioru T^{sn} z klasą K jest ważny, gdyż gwarantuje nam to, iż podstawienia termów z T^{sn} w formułach należących do $SAT(K,\Sigma^{S})$ nie wyprowadzą poza zbiór $SAT(K,\Sigma^{S})$:

STWIERDZENIE 6. Jeżeli T^{sn} jest zgodny z K, to $r^{S}_{*}(SAT(K,\Sigma^{S}))$.

DOWÓD: Trzeba pokazać, że jeżeli $\sigma\in SAT(K,\Sigma^S)$ i $e:\mathbb{ZM}\to T^{Sn}$, to $h^e(\sigma)\in SAT(K,\Sigma^S)$. Biorąc dowolne $\mu\in K$, ze zgodności zbioru T^{Sn} z klasą K otrzymujemy, iż $\mu_e\in K$. Zatem $\sigma\in SAT(\mu_e,\Sigma^S)$. Stąd na mocy warunku (+) mamy $h^e(\sigma)\in SAT(\mu,\Sigma^S)$. □

Oczywiście,dla dowolnego $K\subset K^{\emptyset}$ zbiór $SAT(K,\Sigma^S)$ jest domknięty ze względu na regułę odrywania r^S_o.

6.3.Porównywanie zawartości klas modeli. Dla $K\subset K^{\emptyset}$ zbiór $SAT(K,\Sigma^S)$ możemy nazwać "zawartością klasy K". Wprost z definicji mamy:

$$SAT(K^{\emptyset},\Sigma^S)\subset SAT(K,\Sigma^S)\subset SAT(K^{np},\Sigma^S)\subset SAT(K^{\circ},\Sigma^S)\subset SAT(K^{ol},\Sigma^S)$$

$$SAT(K^{np},\Sigma^S)\subset SAT(K^{1},\Sigma^S)\subset SAT(K^{ol},\Sigma^S)$$

Zbadajmy teraz sytuację, w których pewne z tych inkluzji można zastąpić równościami. Wcześniej przyjmijmy pewną umowę związaną z sylogistyką, wykorzystywaną również dalej.

Z sylogistyką związane są funktory reprezentowane odpowiednio przez symbole a, i, o oraz e. Od nich pochodne są symbole a*, e*, e**, ≡ oraz ex. Oznaczmy przez $\mathbb{FSYL}$ zbiór złożony z symboli wymienionych w tym akapicie. Biorąc pod uwagę także inne oznaczenia podane w 4.2. rozdz. I, otrzymujemy:

STWIERDZENIE 7.

a) Jeżeli $s\subset \mathbb{SN}\cup\mathbb{FSYL}$, to $SAT(K^{np},\Sigma^S)=SAT(K^{\circ},\Sigma^S)$ oraz $SAT(K^{1},\Sigma^S)=SAT(K^{ol},\Sigma^S)$.

b) Jeżeli $s\subset \mathbb{FN}^2\cup\mathbb{FZ}$, to $SAT(K^{np},\Sigma^S)=SAT(K^{1},\Sigma^S)$ oraz $SAT(K^{\circ},\Sigma^S)=SAT(K^{ol},\Sigma^S)$.

c) Jeżeli $s\subset \mathbb{FN}^2\cup\mathbb{FSYL}$, to $SAT(K^{np},\Sigma^S)=SAT(K^{\circ},\Sigma^S)=SAT(K^{1},\Sigma^S)=SAT(K^{ol},\Sigma^S)$.

DOWÓD:

a) Zawieranie $SAT(K^{\circ},\Sigma^S)\subset SAT(K^{np},\Sigma^S)$. Weźmy dowolny model $\mu=(U,d)\in K^{np}$. Połóżmy $A:=\{\underline{S}\in\mathbb{ZM} : \text{Card } d(\underline{S})=1\}$. W przypadku gdy $A\neq\emptyset$, wybieramy dowolną funkcję różnowartościową $f:A\to W$, gdzie W jest dowolnym zbiorem przeliczalnym rozłącznym z U. Z modelu μ tworzymy

model $\mu^{\circ}=(U^{\circ},d^{\circ})$ w następujący sposób. Jeżeli $A=\emptyset$, to $\mu^{\circ}:=\mu$. Jeżeli zaś $A\neq\emptyset$, to $U^{\circ}:=U\cup f(A)$ i $d^{\circ}(\underline{S}):=d(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset d(\underline{S})\}$ dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$. Oczywiście $\mu^{\circ}\in K^{\circ}$. Przedłużenie D° funkcji d° na zbiorze $\mathbb{T}$, spełniające odpowiednie warunki rekurencyjne, ma następującą własność: dla dowolnego $\underline{S}$ z $\mathbb{T}$

(x) $D^{\circ}(\underline{S})=D(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\}$.

Istotnie, dla zmiennych jest to określenie funkcji d°, zaś dla V mamy $D^{\circ}(V)=U^{\circ}=U\cup f(A)=D(V)\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset U\}$. Ponadto załóżmy idukcyjnie, że (x) zachodzi dla termów $\underline{S},\underline{P}$. Wtedy $D^{\circ}(\underline{S}+\underline{P})=D^{\circ}(\underline{S})\cup D^{\circ}(\underline{P})=D(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\}\cup D(\underline{P})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{P})\}=D(\underline{S}+\underline{P})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S}+\underline{P})\}$, gdyż $D(\underline{S}+\underline{P})=D(\underline{S})\cup D(\underline{P})$ oraz dla $\underline{M}\in A$ zbiory $d(\underline{M})$ są jednoelementowe. Podobnie $D^{\circ}(\underline{S}\cdot\underline{P})=D^{\circ}(\underline{S})\cap D^{\circ}(\underline{P})=(D(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\})\cap (D(\underline{P})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{P})\})=(D(\underline{S})\cap D(\underline{P}))\cup(\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\}\cap\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{P})\})$, gdyż U i $f(A)$ są rozłączne. Zatem $D^{\circ}(\underline{S}\cdot\underline{P})=D(\underline{S}\cdot\underline{P})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S}\cdot\underline{P})\}$. Na koniec $D^{\circ}(\underline{S}')=U^{\circ}\setminus D^{\circ}(\underline{S})=(U\cup f(A))\setminus(D(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\})=(U\setminus D(\underline{S}))\cup(f(A)\setminus\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\})=D(\underline{S}')\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A \text{ i } d(\underline{M})\subset D(\underline{S}')\}$, gdyż U i $f(A)$ są rozłączne, dla $\underline{M}\in A$ zbiory $d(\underline{M})$ są jednoelementowe oraz $D(\underline{S}')=U\setminus D(\underline{S})$.

Wykorzystując (x), indukcyjnie po podformułach można pokazać:

(xx) $SAT(\mu,\Sigma^S)=SAT(\mu^{\circ},\Sigma^S)$.

Gdy $A=\emptyset$, jest to tożsamość. Załóżmy zatem, że $A\neq\emptyset$.

Warunek (xx) wystarczy sprawdzić dla formuł atomowych, gdyż dalszy indukcyjny dowód dla formuł złożonych jest oczywisty. Dla formuł atomowych warunek (xx) wynika z dwóch równoważności: $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$ wtw $D^{\circ}(\underline{S})\subset D^{\circ}(\underline{P})$ oraz $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=\emptyset$ wtw $D^{\circ}(\underline{S})\cap D^{\circ}(\underline{P})=\emptyset$. Pierwsza równoważność wynika z rozłączności U i $f(A)$. W drugiej, w oczywisty sposób $D^{\circ}(\underline{S})\cap D^{\circ}(\underline{P})=\emptyset$ pociąga $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})=\emptyset$. Ponadto odwrotnie, gdy $D^{\circ}(\underline{S})\cap D^{\circ}(\underline{P})\neq\emptyset$, to skoro U i $f(A)$ są rozłączne, więc

$D(\underline{S})\cap D(\underline{S})\neq\emptyset$ lub $\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A$ i $d(\underline{M})\subset D(\underline{S})\}\cap\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A$ i $d(\underline{M})\subset D(\underline{P})\}\neq\emptyset$. W drugim przypadku ponieważ f jest różnowartościowa, więc dla pewnego $\underline{M}_0\in\mathbb{M}$, $\emptyset\neq d(\underline{M}_0)\subset D(\underline{S})\cap D(\underline{P})$.

Z dowolności modelu μ dostajemy dowodzoną wyjściową inkluzję.

Zawieranie $SAT(K^{ol},\Sigma^S)\subset SAT(K^1,\Sigma^S)$: dowodzimy podobnie jak wyżej z tym, że przyjmujemy teraz $A:=\{\underline{S}\in T' : Card\ D(\underline{S})=1\}$ i $d^\circ(\underline{S}):=d(\underline{S})\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A$ i $D(\underline{M})\subset d(\underline{S})\}$. Musimy pokazać, że jeśli $\mu\in K^1$, to $\mu^\circ\in K^{ol}$. Istotnie, ponieważ T' jest zgodny z klasą K^1, więc dla każdego $\underline{S}\in T'$, $\emptyset\neq D(\underline{S})\neq U$. Jeżeli $A=\emptyset$ ($\mu^\circ=\mu$), to dla każdego $\underline{S}\in\mathbb{M}$, $Card\,d(\underline{S})>1$ i $Card\,U^\circ\setminus d(\underline{S})>1$. Jeśli zaś $A\neq\emptyset$, to dla każdego $\underline{S}\in\mathbb{M}$: $Card\,d^\circ(\underline{S})>1$ i ponadto $U\setminus d^\circ(\underline{S})=(U\setminus d(\underline{S}))\cup\{f(\underline{M}) : \underline{M}\in A$ i $D(\underline{M})\subset U\setminus d(\underline{S})\}$, $Card\,U\setminus d(\underline{S})=1$ bądź $Card\ U\setminus d(\underline{S})>1$. W pierwszym przypadku $\underline{S}'\in A$, więc $f(\underline{S}')\in U^\circ\setminus d^\circ(\underline{S})$, czyli $Card\ U^\circ\setminus d^\circ(\underline{S})>1$. Resztę dowodu przeprowadzamy podobnie jak poprzednio.

b) Zawieranie $SAT(K^1,\Sigma^S)\subset SAT(K^{np},\Sigma^S)$: z dowolnego modelu $\mu=(U,d)\in K^{np}$ tworzymy model $\mu^\circ=(U^\circ,d^\circ)$ biorąc $U^\circ:=U\cup\{x\}$, gdzie x jest dowolnym przedmiotem nienależącym do U, zaś $d^\circ=d$. Zatem dla $\underline{S}\in T^{+,\bullet}$, $D^\circ(\underline{S})=D(\underline{S})$. Oczywiście $\mu^\circ\in K^1$ i $SAT(\mu,\Sigma^S)=SAT(\mu^\circ,\Sigma^S)$. Z dowolności μ otrzymujemy dowodzoną inkluzję.

Zawieranie $SAT(K^{ol},\Sigma^S)\subset SAT(K^\circ,\Sigma^S)$: z dowolnego modelu $\mu=(U,d)\in K^\circ$ tworzymy model $\mu^\circ=(U^\circ,d^\circ)$ biorąc $U^\circ:=U\cup\{x,y\}$, gdzie x,y są dowolnymi różnymi przedmiotami nienależącymi do U, zaś $d^\circ=d$. Oczywiście $\mu^\circ\in K^{ol}$ i $SAT(\mu,\Sigma^S)=SAT(\mu^\circ,\Sigma^S)$. *c)* Wniosek z *a)* i *b)*. □

W *a)* istotne było założenie, że zbiór formuł został wyznaczony bez użycia symboli: ex!, sol, ε, $\bar{\varepsilon}$, =, i!. Przykładowo, formuły $\neg ex!S$, $\neg solS$, $\neg S\varepsilon S$, $\neg S\bar{\varepsilon}S$, $\neg S=S$, $\neg Si!S$ są spełnione w każdym modelu z K° (odp. K^{ol}), lecz nie należą do $SAT(K^{np},\sum)$ (odp. $SAT(K^1,\sum)$). Podobnie w *b)* założenie o zbiorze s było istotne, gdyż przykładowo formuły $S'iS'$ oraz $\neg VaS$ są spełnione w każdym modelu z K^1, lecz niektórych modelach z K^{np} (odp. K°) nie są spełnione. Na koniec

zauważmy, że dla $s\subset\{V, i, e, e^{\cdot}, e^{\cdot\cdot}\}$, identycznie jak w *b)* można udowodnić, że $SAT(K^1,\Sigma^S)=SAT(K^{np},\Sigma^S)$. Stąd i z *a)* dla s wyciągamy wniosek odpowiedni jak w *c)*.

Z ostatniej uwagi wynika, iż stwierdzenia 6 nie można odwrócić, gdyż przykładowo T^V nie jest zgodny z K^1, lecz zbiór $SAT(K^1,\Sigma^{i,V})$ domknięty jest ze względu na regułę podstawiania. Istotnie, ze stwierdzenia 6 zbiór $SAT(K^{np},\Sigma^{i,V})$ jest domknięty, zaś $SAT(K^1,\Sigma^{i,V})=SAT(K^{np},\Sigma^{i,V})$.

Udowodnimy jeszcze

STWIERDZENIE 8. Jeżeli $s\subset\{ex!, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, =, i!\}$ lub $s\subset\{V, \cdot, a, o, \equiv\}$, to $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^S)=TAUT(\Sigma^S)=SAT(K^{np},\Sigma^S)$.

DOWÓD: Zawieranie $SAT(K^{np},\Sigma^S)\subset TAUT^{\emptyset}(\Sigma^S)$ dla $s\subset\{ex!, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, =, i!\}$: z dowolnie wybranego modelu $\mu=(U,d)$ tworzymy model $\mu^\circ=(U^\circ,d^\circ)$ biorąc $U^\circ:=U_1^\circ\cup U_2^\circ\cup\mathbb{M}\cup\{\{\underline{S}\} : \underline{S}\in\mathbb{M}\}$, gdzie $U_1^\circ:=\{d(\underline{S})\cap d(\underline{P}): \underline{S},\underline{P}\in\mathbb{M}$ i $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})\neq\emptyset\}$ i $U_2^\circ:=\{\{u^\circ\} : u^\circ\in U_1^\circ$ i $Card\ u^\circ>1\}$, oraz definiując na $\mathbb{M}$ funkcję d° w sposób:

$$d^\circ(\underline{S}):=\begin{cases}\{d(\underline{S})\}, & \text{gdy } Card\ d(\underline{S})=1\\ \{u^\circ\in U_1^\circ: u^\circ\subset d(\underline{S})\}\cup\{u^\circ\in U_2^\circ : u^\circ\subset 2^{d(\underline{S})}\}\cup\{\underline{S},\{\underline{S}\}\}, & \text{gdy jest inaczej}\end{cases}$$

Oczywiście $\mu^\circ\in K^{np}$.

Niech $Card\ d(\underline{S})\cap d(\underline{P})=1$. Rozważmy dwa przypadki:

1° $\underline{S}=\underline{P}$: wtedy $Card\ d(\underline{S})=1$, więc $d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})=\{d(\underline{S})\}$.

2° $\underline{S}\neq\underline{P}$: wtedy $d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})=\{d(\underline{S})\cap d(\underline{P})\}$. Istotnie, oczywiste jest, że $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})\in d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})$. Ponadto przypuśćmy, że $x\in d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})$. Gdyby $x\in U_2^\circ$, to dla pewnego $y\in U_1^\circ$ mielibyśmy $y\subset d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$ i $Card\ y>1$, co jest niemożliwe. Ponadto, skoro $\{\underline{S},\{\underline{S}\}\}\cap\{\underline{P},\{\underline{P}\}\}=\emptyset$, więc $x\in U_1^\circ$. Stąd $\emptyset\neq x\subset d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$, czyli $x=d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$.

Odwrotnie, niech $Card\ d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})=1$. Mamy dwa przypadki:

1° $\underline{S}=\underline{P}$: wtedy z określenia funkcji d° mamy $Card\ d(\underline{S})=1$.

2° $\underline{S}\neq\underline{P}$: wtedy dla pewnego $x_0\in U_1^\circ\cup U_2^\circ$, $\{x_0\}=d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})$.Zatem bądź $\emptyset\neq x_0\subset d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$ bądź $\emptyset\neq y_0\subset d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$ i $x_0=\{y_0\}$. Stąd $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})\neq\emptyset$, czyli należy do U_1°. Zatem z definicji funkcji d° mamy $x_0=d(\underline{S})\cap d(\underline{P})$. Zbiór x_0 musi być jednoelementowy, gdyż w przeciwnym przypadku $\{x_0\}$ również należałoby do $d^\circ(\underline{S})\cap d^\circ(\underline{P})$, co jest sprzeczne z założeniem.

Teraz, indukcyjnie po podformułach, można łatwo pokazać, że $SAT(\mu,\Sigma^S)=SAT(\mu^\circ,\Sigma^S)$. Formuła atomowa $\underline{S}i!\underline{P}$ (odp. ex!$\underline{S}$, $\underline{S}\varepsilon\underline{P}$, $\underline{S}\bar{\varepsilon}\underline{P}$, $\underline{S}=\underline{P}$) jest spełniona w μ wtw Card $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})=1$ (odp. Card $d(\underline{S})=1$, Card $d(\underline{S})=1$ i Card $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})=1$, Card $d(\underline{S})=1$ i Card $d(\underline{S})\cap d(\underline{P})\neq 1$, Card$d(\underline{S})=1=$Card$d(\underline{P})$ i Card$d(\underline{S})\cap d(\underline{P})=1$). Zatem odpowiednie formuły są spełnione w μ°, i odwrotnie.

Z dowolności μ otrzymujemy dowodzoną inkluzję.

Zawieranie $SAT(K^{np},\Sigma^S)\subset TAUT^{\emptyset}(\Sigma^S)$ dla $s\subset\{V, \cdot, a, o, \equiv\}$: z dowolnie wybranego modelu $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$ tworzymy model $\mu^\circ=(U^\circ,d^\circ)$ biorąc $U^\circ:=T^{V,\cdot}$ i $d^\circ(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U^\circ : D(\underline{M})\subset d(\underline{S})\}$. Model $\mu^\circ\in K^{np}$, gdyż $\underline{S}\in d^\circ(\underline{S})$. Ponadto, dla wszystkich $\underline{S}$ z $T^{+,\cdot}$, $D^\circ(\underline{S})=\{\underline{M}\in U^\circ : D(\underline{M})\subset D(\underline{S})\}$. Stąd $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$ wtw $D^\circ(\underline{S})\subset D^\circ(\underline{P})$. Zatem łatwo pokazać, że $SAT(\mu,\Sigma^S)=SAT(\mu^\circ,\Sigma^S)$. □

Założenie o zbiorze s było istotne, gdyż przykładowo formuły SiS, (SaP ∧ PεP)⇒PaS, ex!V⇒ex!S, ex!V⇒SaP, solS⇔ex!S, (SaP ∧ solP)⇒PaS, (solS ∧ ¬SεP)⇒SεP′ i ¬SaS′ są spełnione w każdym modelu z K^{np}, lecz nie należą do TAUT(∑).

6.4.Tautologiczność w sensie tradycyjnym. W przypadku, gdy zbiór termów T^{Sn} jest zgodny z klasą modeli K^{np} (odp. K^1), tj. gdy $sn\subset\{V,+\}$ (odp. $sn\subset\{'\}$), wprowadzamy dla formuł z Σ^S pojęcie tautologii w sensie tradycyjnym:

$TAUT^t(\Sigma^S):=SAT(K^{np},\Sigma^S)$ (odp. $TAUT^t(\Sigma^S):=SAT(K^1,\Sigma^S)$)

Zauważmy, że w przypadku, gdy zbiór T^{Sn} jest zgodny zarówno z klasą K^{np} jak i z klasą K^1, tj. gdy $sn=\emptyset$ ($T^{Sn}=\mathbb{ZM}$), na mocy stwierdzenia 7b mamy $SAT(K^{np},\Sigma^S)=SAT(K^1,\Sigma^S)$. Zatem w tej sytuacji oba pojęcia tautologii w sensie tradycyjnym są równozakresowe. W związku z powyższym możemy oba pojęcia połączyć w jedno, gdyż gdy dotyczą tych samych formuł, to pokrywają się.

Na terenie sylogistyki tradycyjnej, gdy $s\subset\{a, i, o, e, \equiv\}$ (symbole $a^\cdot$, $e^\cdot$, $e^{\cdot\cdot}$ oraz ex są w tym przypadku zbędne), na mocy stwierdzenia 7a(c) mamy $TAUT^t(\Sigma^S)= SAT(K^1,\Sigma^S)$ (czyli w tym przypadku można było dopuszczać podstawienia samych nazw ogólnych). W przypadku zaś, gdy $s\subset\{', a, i, o, e, \equiv\}$, na mocy stwierdzenia 7a mamy $TAUT^t(\Sigma^S)=SAT(K^{ol},\Sigma^S)$ (czyli w tym przypadku można było dopuszczać podstawienia tylko nazw ogólno-limitowanych).

Rozdział IV

Pewne zagadnienia semantyczne

W rozdziale tym zbiory T^{Sn} i Σ^S będą określone jak w §1. rozdz. III.

§1. Operacje konsekwencji semantycznej

Niech K będzie dowolną klasą modeli zawartą w $K^{\emptyset}$. Na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru Σ^S określamy funkcję C_K^S o wartościach należących do dziedziny, w następujący sposób: dla dowolnych $\sigma\in\Sigma^S$ oraz $X\subset\Sigma^S$

$\sigma\in C_K^S(X)$ wtw dla każdego $\mu\in K$ o ile $X\subset SAT(\mu,\Sigma^S)$, to również $\sigma\in SAT(\mu,\Sigma^S)$.

Funkcję C_K^S nazywamy operacją konsekwencji semantycznej w Σ^S wyznaczoną przez klasę K. Jest to operacja konsekwencji w sensie Tarskiego, gdyż spełnia warunki a), b), oraz c) wymienione w §2. rozdz.III. Ponadto zauważmy, że

$C_K^S(\emptyset)=SAT(K,\Sigma^S)=C_K^S(SAT(K,\Sigma^S))$

$\sigma\in C_K^S(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_k\})$ wtw $((\sigma_1\wedge\ldots\wedge\sigma_k)\Rightarrow\sigma)\in SAT(K,\Sigma^S)$

jeżeli zbiór T^{Sn} jest zgodny z klasą K i $\sigma\in C_K^S(X)$, to dla każdego podstawienia $e:\mathbb{ZM}\to T^{Sn}$ mamy $h^e(\sigma)\in C_K^S(h^e(X))$.

§2. Definiowalność

Przyjmijmy następujące umowy, które będą obowiązywać zawsze, gdy

mówimy o jednoczesnym podstawianiu za zmienne:

1° dla zaznaczenia faktu, że k ($k\geq 1$) różnych zmiennych $\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k$ występuje w formule σ z Σ^S (odp. w termie $\underline{P}$ z T^{Sn}), oraz że są to wszystkie zmienne występujące w σ (odp. w $\underline{P}$), będziemy pisać : $\sigma(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k)$ (odp. $\underline{P}(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k)$).

2° dla danych k różnych zmiennych $\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k$, formuły $\sigma(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k)$, termu $\underline{P}(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k)$ i dowolnych termów $\underline{M}_1,\ldots,\underline{M}_k$ z T^{Sn}, na $\mathbb{ZM}$ określamy jednoczesne podstawianie termów następującym warunkiem : dla $i=1,\ldots,k$ $e(\underline{S}_i)=\underline{M}_i$, zaś dla pozostałych zmiennych $e(\underline{S})=\underline{S}$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$\sigma(\underline{S}_1/\underline{M}_1,\ldots,\underline{S}_k/\underline{M}_k):=h^e(\sigma(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k))$

$\underline{P}(\underline{S}_1/\underline{M}_1,\ldots,\underline{S}_k/\underline{M}_k):=h^e(\underline{P}(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k))$

2.1.Definiowalność funktorów zdaniotwórczych. Załóżmy, że $\S_1,\ldots,\S_k\in s$ ($k>0$) należą do zbioru s, który wyznacza zbiór Σ^S. Ponadto niech $\S\in\mathbb{F}\mathbb{Z}^1\setminus\{\S_1,\ldots,\S_k\}$ (odp. $\S\in\mathbb{F}\mathbb{Z}^2\setminus\{\S_1,\ldots,\S_k\}$). Przyjmijmy, że $\Sigma^{S'}$ jest zbiorem formuł zdaniowych wyznaczonym przez zbiór $s':=\{\S\}\cup s$ ($\Sigma^{S'}=\Sigma^S$ wtw $\S\in s$). Wtedy dla dowolnej klasy modeli K, z którą zgodny jest zbiór T^{Sn} mówimy, że

stała § jest definiowalna w zbiorze Σ^S względem klasy K przez stałe $\S_1,\ldots,\S_k$ wtw dla pewnej formuły $\sigma(\underline{S})$ (odp. $\sigma(\underline{S},\underline{P})$), w której występują $\S_1,\ldots,\S_k$, lecz nie występuje żaden inny symbol z $\mathbf{S}$, jest tak, iż $\S\underline{S}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S})$ (odp. $\S\underline{S}\,\underline{P}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S},\underline{P})$) należą do $SAT(K,\Sigma^S)$.

Formułę $\S\underline{S}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S})$ (odp. $\S\underline{S}\,\underline{P}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S},\underline{P})$) z $\Sigma^{S'}$ występującą w powyższym określeniu nazywamy definicją stałej § względem K.

Podamy teraz przykładowo konkretne definicje względem klasy $K^{\emptyset}$ (będą one również definicjami względem innych rozważanych klas modeli). Pokazują one, że dana stała jest definiowalna przez odpowiednie stałe:

(def$_1$ ex) $\quad\quad$ $\mathrm{ex}\mathbf{S}\Leftrightarrow \mathrm{Sa}^{\cdot}\mathbf{S}$

$(def_2\ ex)$ $exS \Leftrightarrow SiS$

$(def_3\ ex)$ $exS \Leftrightarrow (ex!S \vee \neg solS)$

$(def_4\ ex)$ $exS \Leftrightarrow \neg SaS'$

$(def_5\ ex)$ $exS \Leftrightarrow \neg S \equiv (S+S')'$

$(def_6\ ex)$ $exS \Leftrightarrow \neg S \equiv (S \cdot S')$

$(def_1\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow (exS \wedge solS)$

$(def_2\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow (Sa^{\cdot}S \wedge solS)$

$(def_3\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow (SiS \wedge solS)$

$(def_4\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow S\varepsilon S$

$(def_5\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow Si!S$

$(def_1\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg exS \vee ex!S)$

$(def_2\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg Sa^{\cdot}S \vee ex!S)$

$(def_3\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg SiS \vee ex!S)$

$(def_4\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg exS \vee S\varepsilon S)$

$(def_5\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg Sa^{\cdot}S \vee S\varepsilon S)$

$(def_6\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (\neg SiS \vee S\varepsilon S)$

$(def_7\ sol)$ $solS \Leftrightarrow (S \equiv (S+S')' \vee S\varepsilon S)$

$(def_1\ a)$ $SaP \Leftrightarrow (\neg Sa^{\cdot}S \vee Sa^{\cdot}P)$

$(def_2\ a)$ $SaP \Leftrightarrow (\neg exS \vee Sa^{\cdot}P)$

$(def_3\ a)$ $SaP \Leftrightarrow \neg SiP'$

$(def_4\ a)$ $SaP \Leftrightarrow (S+P) \equiv P$

$(def_5\ a)$ $SaP \Leftrightarrow (S \cdot P) \equiv S$

$(def_1\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow (exS \wedge SaP)$

$(def_2\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow (SiS \wedge SaP)$

$(def_3\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow ((ex!S \vee \neg solS) \wedge SaP)$

$(def_4\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow (S\varepsilon P \vee (SaP \wedge \neg solS))$

$(def_5\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow (\neg S \equiv (S+S')' \wedge (S+P) \equiv P)$

$(def_1\ \equiv)$ $S \equiv P \Leftrightarrow (SaP \wedge PaS)$

$(def_2\ \equiv)$ $S \equiv P \Leftrightarrow ((\neg Sa^{\cdot}S \wedge \neg Pa^{\cdot}P) \vee (Sa^{\cdot}P \wedge Pa^{\cdot}S))$

$(def_1\ o)$ $SoP \Leftrightarrow \neg SaP$

$(def_2\ o)$ $SoP \Leftrightarrow (Sa^{\cdot}S \wedge \neg Sa^{\cdot}P)$

$(def_3\ o)$ $SoP \Leftrightarrow \neg(S+P) \equiv P$

$(def_1\ i)$ $SiP \Leftrightarrow \neg SaP'$

$(def_2\ i)$ $SiP \Leftrightarrow \neg S'+P' \equiv S+S'$

$(def_1\ e)$ $SeP \Leftrightarrow \neg SiP$

$(def_2\ e)$ $SeP \Leftrightarrow S+P' \equiv P'$

$(def_1\ e^{\cdot})$ $Se^{\cdot}P \Leftrightarrow (SiS \wedge \neg SiP)$

$(def_2\ e^{\cdot})$ $Se^{\cdot}P \Leftrightarrow (\neg S+S' \equiv S' \wedge S+P' \equiv P')$

$(def_1\ e^{\cdot\cdot})$ $Se^{\cdot\cdot}P \Leftrightarrow (SiS \wedge PiP \wedge \neg SiP)$

$(def_2\ e^{\cdot\cdot})$ $Se^{\cdot\cdot}P \Leftrightarrow (\neg S+S' \equiv S' \wedge \neg P+P' \equiv P' \wedge S+P' \equiv P')$

$(def_1\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (ex!S \wedge SaP)$

$(def_2\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (exS \wedge solS \wedge SaP)$

$(def_3\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (ex!S \wedge Sa^{\cdot}P)$

$(def_4\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (ex!S \wedge SiP)$

$(def_5\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (solS \wedge Sa^{\cdot}P)$

$(def_6\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (solS \wedge SiP)$

$(def_7\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (Si!S \wedge Si!P)$

$(def_1\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (S\varepsilon S \wedge \neg S\varepsilon P)$

$(def_2\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (ex!S \wedge \neg SaP)$

$(def_3\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (exS \wedge solS \wedge \neg SaP)$

$(def_4\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (ex!S \wedge \neg Sa^{\cdot}P)$

$(def_5\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (ex!S \wedge \neg SiP)$

$(def_6\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (solS \wedge Sa^{\cdot}S \wedge \neg Sa^{\cdot}P)$

$(def_7\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (solS \wedge SiS \wedge \neg SiP)$

$(def_8\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (Si!S \wedge \neg Si!P)$

$(def_1\ =)$ $S=P \Leftrightarrow (S\varepsilon P \wedge P\varepsilon S)$

$(def_2\ =)$ $S=P \Leftrightarrow (ex!S \wedge ex!P \wedge SaP)$

$(def_3\ =)$ $S=P \Leftrightarrow (exS \wedge SaP \wedge solP)$

$(def_4\ =)$ $S=P \Leftrightarrow (Sa^{\cdot}P \wedge ex!P)$

$(def_5\ =)$ $S=P \Leftrightarrow (Sa^{\cdot}P \wedge solP)$

$(def_6 =)$ $S=P \Leftrightarrow (ex!S \wedge ex!P \wedge SiP)$

$(def_7 =)$ $S=P \Leftrightarrow (solS \wedge solP \wedge SiP)$

Przejdźmy teraz do konkretnych definicji względem klasy K^{np} (będą one również definicjami względem klas K^{o}, K^{1} i K^{o1}). Ponieważ dla każdego $\underline{S}$ z T^{Sn} formuły ex$\underline{S}$, $\underline{Si}\underline{S}$ oraz $\underline{Sa}^{\cdot}\underline{S}$ są spełnione w dowolnym modelu z K^{np}, więc z odpowiednich formuł przedstawionych powyżej otrzymamy formuły również spełnione w każdym modelu z K^{np} (indeks górny 't' w oznaczeniach formuł będzie mówił o tym, że są to definicje możliwe do przyjęcia w tzw. logice tradycyjnej):

$(def^t\ ex!)$ $ex!S \Leftrightarrow solS$

$(def^t\ sol)$ $solS \Leftrightarrow S\varepsilon S$

$(def^t\ a^{\cdot})$ $Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow SaP$

$(def^t\ e^{\cdot})$ $Se^{\cdot}P \Leftrightarrow SeP$

$(def^t\ e^{\cdot\cdot})$ $Se^{\cdot\cdot}P \Leftrightarrow SeP$

$(def^t\ \varepsilon)$ $S\varepsilon P \Leftrightarrow (solS \wedge SaP)$

$(def^t\ \bar{\varepsilon})$ $S\bar{\varepsilon}P \Leftrightarrow (solS \wedge \neg SaP)$

$(def^t =)$ $S=P \Leftrightarrow (SaP \wedge solP)$

Z powyższych uwag wynika, że w modelach należących do K^{np} naturalne interpretacje stałych a oraz $a^{\cdot}$ (odp. e, $e^{\cdot}$ oraz $e^{\cdot\cdot}$) są nieodróżnialne. Symbole te w logice tradycyjnej dublują się i równie dobrze każdy z nich mógłby występować w jej formułach. Z punktu widzenia tej logiki bezprzedmiotowy jest problem : słaba czy mocna interpretacja zdań ogólnych? Podobne uwagi o dublowaniu dotyczą stałych ex! oraz sol.

2.2.Definiowalność funktorów nazwotwórczych i nazwy uniwersalnej. W pracy tej nie będziemy się zajmować w ogóle definiowalnością stałej ', gdyż nie można jej zdefiniować w ramach rozważanego systemu. W ramach rozważanego rachunku nazw można jednak zdefiniować stałe + oraz · przy użyciu stałej ≡. Zauważmy mianowicie, że poniższe formuły są spełnione w każdym modelu z klasy $K^{\emptyset}$:

$(def +)$ $(S+P)\equiv(S'\cdot P')'$

$(def \cdot)$ $(S\cdot P)\equiv(S'+P')'$

Zauważmy, iż dla każdego modelu (U,d) i każdego termu $\underline{S}$ jest tak, że $D^U(\underline{S}+\underline{S}')=D^U((\underline{S}\cdot\underline{S}')')=U$. Zatem poniższe formuły są spełnione w każdym modelu z $K^{\emptyset}$:

$(def_1\ V)$ $V\equiv(S+S')$

$(def_2\ V)$ $V\equiv(S\cdot S')'$

Syntaktycznymi zagadnieniami definiowalności zajmiemy się w §2. rozdz. II części B.

CZĘŚĆ B
METATEORIA AKSJOMATYCZNYCH SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH BEZKWANTYFIKATOROWEGO RACHUNKU NAZW NADBUDOWANYCH NAD KLASYCZNYM RACHUNKIEM ZDAŃ

Rozdział I

Aksjomatyczne systemy dedukcyjne bezkwantyfikatorowego rachunku nazw nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań

§1. Aksjomatyczne systemy dedukcyjne

Jak już napisaliśmy wcześniej, w niniejszej pracy będziemy odróżniać pojęcie systemu dedukcyjnego od pojęcia teorii logicznej (rachunku logicznego) - rozumianej jako pewien zbiór formuł domknięty ze względu na jakąś operację konsekwencji[1]. Będziemy zajmować się jedynie aksjomatycznymi systemami dedukcyjnymi bezkwantyfikatorowego rachunku nazw.

Niech T^{sn} oraz Σ^S będą odpowiednio zbiorami termów i formuł zdaniowych, wyznaczonymi przez zbiory symboli $sn \subset s \subset \mathbb{S}$. Poniżej określimy sposób wyprowadzania tez w danym systemie[2].

1.1.Reguły strukturalne. Dana reguła r nad Σ^S jest strukturalna

1 W niektórych pracach w miejscu używanego przez nas terminu 'teoria' używa się terminu 'system dedukcyjny' (np.[15], [2] s. 322) zaś w miejscu terminu 'aksjomatyczny system dedukcyjny' - termin 'system aksjomatyczny' (np. [2] s. 322).

2 Wprowadzone w tej części pojęcia wzorowane są na pojęciach pochodzących z metateorii aksjomatycznych systemów dedukcyjnych rachunku zdań, przedstawionej w [24] i [25].

wtw dla dowolnych $\sigma_1,\ldots,\sigma_k \in \Sigma^S$ i $e:\mathbb{ZM}\to T^{sn}$ jeżeli $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in r$, to również $(h^e(\sigma_1),\ldots,h^e(\sigma_k))\in r$.

Reguła odrywania r^S_o nad Σ^S jest strukturalna na mocy określenia funkcji h^e. Reguła podstawiania r^S_* nad Σ^S nie jest strukturalna. Istotnie, do zbioru s należy jakiś symbol § z $\mathbb{FZ}^2$. Mamy (S§P, M§Q)$\in r^S_*$, lecz dla podstawienia e takiego, iż $e(S)=e(P)=S$, $e(M)=M$ i $e(Q)=Q$ mamy $(h^e(S\S P), h^e(M\S Q))\notin r^S_*$, gdyż (S§S, M§Q)$\notin r^S_*$.

1.2.Wyprowadzanie. Sposób budowy dowodu. Wybierzmy dowolny zbiór R złożony z reguł nad Σ^S. Mówimy, że

formuła $\sigma\in\Sigma^S$ jest wyprowadzalna ze zbioru $X\subset\Sigma^S$ za pomocą reguł ze zbioru R wtw istnieje skończony ciąg $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ formuł z Σ^S taki, że $\sigma=\sigma_n$ oraz dla każdego $i\le n$: $\sigma_i\in X$ lub dla jakiejś reguły $r\in R$ istnieją $i_1,\ldots,i_k<i$ takie, że $(\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k},\sigma_i)\in r$.

Ciąg o którym jest mowa w powyższym określeniu nazywamy dowodem formuły σ w oparciu o zbiór formuł X i zbiór reguł R.

1.3.Aksjomatyczne systemy dedukcyjne. Przy ustalonym zbiorze Σ^S (wyznaczonym w sposób jednoznaczny przez zbiór s zawarty w $\mathbb{S}$) i ustalonym powyżej sposobie wyprowadzania formuł z danego podzbioru zbioru Σ^S za pomocą pewnego zbioru reguł nad Σ^S, aksjomatyczny system dedukcyjny $\mathcal{S}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez wybór zbioru reguł R (tzw. reguł pierwotnych systemu $\mathcal{S}$) oraz wybór zbioru formuł $A\subset\Sigma^S$ (tzw. zbioru aksjomatów systemu $\mathcal{S}$). Dalej będziemy mówić, że system $\mathcal{S}$ jest wyznaczony przez parę (R,A).

1.4.Tezy systemu aksjomatycznego. Tezą systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego przez parę (R,A) jest każda formuła należąca do Σ^S i wyprowadzalna ze zbioru A za pomocą reguł z R. Zbiór tez systemu $\mathcal{S}$ oznaczymy przez TEZY($\mathcal{S}$).

Można wykazać, wzorując się na [24] (s. 80-82) i [25] (s. 36,

37), iż jeżeli R składa się wyłącznie z reguł strukturalnych, to:

1. systemy wyznaczone przez pary $(R\cup\{r^S_*\},A)$ i $(R,SB^{sn}(A))$ mają ten sam zbiór tez, gdzie SB^{sn} jest operacją konsekwencji określoną warunkiem $SB^{sn}(X):=\{h^e(\sigma) : \sigma\in X \text{ i } e:ZM\to T^{sn}\}$.

2. jeżeli σ jest tezą systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego przez parę (R,A), to dla dowolnego $e:ZM\to T^{sn}$ również $h^e(\sigma)$ jest tezą systemu wyznaczonego przez parę $(R,h^e(A))$.

3. jeżeli system $\mathcal{S}$ wyznaczony jest przez parę (R,A), to zbiór $SB^{sn}(TEZY(\mathcal{S}))$ zawarty jest w zbiorze tez systemu wyznaczonego przez parę $(R,SB^{sn}(A))$.

1.5.Operacja konsekwencji w systemie aksjomatycznym. Niech $\mathcal{S}$ będzie systemem wyznaczonym przez parę (R,A). Dla dowolnego $X\subset\Sigma^S$ przyjmijmy, że $C_{\mathcal{S}}(X)$ jest zbiorem formuł należących do Σ^S i wyprowadzalnych ze zbioru $A\cup X$ za pomocą reguł ze zbioru R. Funkcja $C_{\mathcal{S}}$ jest finitystyczną operacją konsekwencji w sensie Tarskiego. Oczywiście, $C_{\mathcal{S}}(\emptyset)=TEZY(\mathcal{S})$.

1.6.Systemy inwariantne. System $\mathcal{S}$ wyznaczony przez parę (R,A) jest inwariantny wtw każda reguła z R jest strukturalna oraz $A=SB^{sn}(A)$, tj. $r^S_*(A)$. Wtedy zachodzi:

1. jeżeli $\sigma\in C_{\mathcal{S}}(X)$, to dla dowolnego $e:ZM\to T^{sn}$, $h^e(\sigma)\in C_{\mathcal{S}}(h^e(X))$, tzn. $h^e(C_{\mathcal{S}}(X))\subset C_{\mathcal{S}}(h^e(X))$. Wynika to z uwagi 2 z 1.4., zastosowanej do systemów wyznaczonych przez $(R,A\cup X)$ i $(R,h^e(A\cup X))$, oraz z równości $h^e(A\cup X)=A\cup h^e(X)$.

2. dla dowolnego $X\subset\Sigma^S$ mamy $SB^{sn}(C_{\mathcal{S}}(X))\subset C_{\mathcal{S}}(SB^{sn}(X))$. Wynika to z równości $SB^{sn}(A\cup X)=A\cup SB^{sn}(X)$ oraz z uwagi 3 z 1.4. zastosowanej do systemów wyznaczonych przez $(R,A\cup X)$ i $(R,SB^{sn}(A\cup X))$. Zatem $SB^{sn}(C_{\mathcal{S}}(SB^{sn}(X)))=C_{\mathcal{S}}(SB^{sn}(X))$ i w szczególności $SB^{sn}(TEZY(\mathcal{S}))=TEZY(\mathcal{S})$, tj. $r^S_*(TEZY(\mathcal{S}))$.

Jeżeli system $\mathcal{S}$ jest wyznaczony przez parę $(R,SB^{sn}(A_1))$, w której R składa się z reguł strukturalnych, to system $\mathcal{S}$ jest inwariantny i zbiór $TEZY(\mathcal{S})$ pokrywa się ze zbiorem tez systemu wyznaczonego przez parę $(R\cup\{r^S_*\},A_1)$.

1.7.Systemy sprzeczne. Zbiory formuł sprzecznych w systemie. Mówimy, że system $\mathcal{S}$ jest sprzeczny wtw $TEZY(\mathcal{S})=\Sigma^S$. Zbiór $X\subset\Sigma^S$ jest sprzeczny w systemie $\mathcal{S}$ wtw $C_{\mathcal{S}}(X)=\Sigma^S$.

1.8.Zbiór formuł maksymalny w systemie. Mówimy, że zbiór $X\subset\Sigma^S$ jest maksymalny w systemie $\mathcal{S}$ wtw X jest niesprzeczny w $\mathcal{S}$ oraz dla każdego $\sigma\in\Sigma^S\setminus X$ zbiór $X\cup\{\sigma\}$ jest sprzeczny w $\mathcal{S}$.

Zauważmy, że dla dowolnego zbioru X maksymalnego w $\mathcal{S}$ zachodzi : $C_{\mathcal{S}}(X)=X$. Istotnie, z istnienia $\sigma\in C_{\mathcal{S}}(X)\setminus X$ wynika sprzeczność : $\Sigma^S=C_{\mathcal{S}}(X\cup\{\sigma\})\subset C_{\mathcal{S}}(C_{\mathcal{S}}(X)\cup\{\sigma\})=C_{\mathcal{S}}(X)\subset\Sigma^S$ i $C_{\mathcal{S}}(X)\neq\Sigma^S$. Zatem każdy zbiór maksymalny w systemie $\mathcal{S}$ zawiera $TEZY(\mathcal{S})$.

1.9.Adekwatność i silna adekwatność klasy modeli. Mówimy, że klasa modeli $K\subset K^{\emptyset}$ jest adekwatna (odp. silnie adekwatna) względem systemu $\mathcal{S}$ wtw $TEZY(\mathcal{S})=SAT(K,\Sigma^S)$ (odp. $C_{\mathcal{S}}=C^S_K$).

1.10.Reguły niezawodne w klasie modeli. Reguła r nad Σ^S jest niezawodna w klasie modeli K wtw dla dowolnych $\sigma,\sigma_1,\dots,\sigma_k\in\Sigma^S$ jeżeli $(\sigma_1,\dots,\sigma_k,\sigma)\in r$ oraz $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}\subset SAT(K,\Sigma^S)$, to $\sigma\in SAT(K,\Sigma^S)$.

Jeżeli zbiór termów T^{sn} jest zgodny z klasą K, to $r^S_*(SAT(K,\Sigma^S))$, więc reguła r^S_* jest niezawodna w klasie K.

1.11.Reguły normalne w klasie modeli. Reguła r nad Σ^S jest normalna w klasie modeli K wtw dla dowolnych $\sigma,\sigma_1,\dots,\sigma_k\in\Sigma^S$ jeżeli $(\sigma_1,\dots,\sigma_k,\sigma)\in r$, to $\sigma\in C^S_K(\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\})$.

W dowolnej klasie $K\neq\emptyset$, reguła r^S_* nie jest normalna. Reguła r^S_o jest normalna (czyli również niezawodna) w każdej klasie modeli.

§2. Inwariantne systemy odrywaniowe nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań

O zbiorach T^{sn} i Σ^S załóżmy to samo co w §1.

2.1.Zagadnienia syntaktyczne. Aksjomatyczny system $\mathcal{S}$ wyznaczony przez (R,A) nazywamy odrywaniowym wtw $R=\{r_o^S\}$. System $\mathcal{S}$ nazywamy inwariantnym systemem odrywaniowym nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań wtw $\mathcal{S}$ jest odrywaniowy i ma zbiór aksjomatów równy $KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax)$, dla pewnego zbioru Ax rozłącznego ze zbiorem $KRZ(\Sigma^S)$. Zauważmy, że $SB^{Sn}(KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax))=KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax)$, czyli istotnie, $\mathcal{S}$ jest inwariantny. W tym przypadku zbiór Ax nazywamy zbiorem aksjomatów specyficznych systemu $\mathcal{S}$. Każdy inwariantny system odrywaniowy nadbudowany nad klas. rach. zdań jest wyznaczony w sposób jednoznaczny przez swój zbiór aksjomatów specyficznych.

UWAGA! Zamiast zbioru $KRZ(\Sigma^S)$ mogliśmy wziąć zbiór podstawień dowolnej aksjomatyki klas. rach. zdań formułami z Σ^S.

Ponieważ do zbioru $KRZ(\Sigma^S)$ należą wszystkie podstawienia aksjomatów implikacyjnego rachunku zdań Hilberta, więc dla inwariantnego systemu odrywaniowego $\mathcal{S}$ nadbudowanego nad klasycznym rachunkiem zdań zachodzi twierdzenie o dedukcji, tzn. $\sigma_1\in C_{\mathcal{S}}(X\cup\{\sigma_2\})$ wtw $\sigma_2\Rightarrow\sigma_1\in C_{\mathcal{S}}(X)$. Ponadto łatwo zauważyć, że zbiór X jest sprzeczny w $\mathcal{S}$ wtw istnieje taka formuła $\sigma\in\Sigma^S$, że $\{\sigma,\neg\sigma\}\subset C_{\mathcal{S}}(X)$. Również łatwo pokazać, że zbiór $Y\cup\{\sigma\}$ (odp. $Y\cup\{\neg\sigma\}$) jest sprzeczny w $\mathcal{S}$ wtw $\neg\sigma\in C_{\mathcal{S}}(Y)$ (odp. $\sigma\in C_{\mathcal{S}}(Y)$).

TWIERDZENIE 1. Dowolny zbiór X, który jest maksymalny w inwariantnym systemie odrywaniowym nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań, spełnia poniższe warunki:

(I) $\neg\sigma\in X$ wtw $\sigma\notin X$

(II) $\sigma_1\wedge\sigma_2\in X$ wtw $\sigma_1\in X$ i $\sigma_2\in X$

(III) $\sigma_1\vee\sigma_2\in X$ wtw $\sigma_1\in X$ lub $\sigma_2\in X$

(IV) $\sigma_1\Rightarrow\sigma_2\in X$ wtw $\sigma_1\notin X$ lub $\sigma_2\in X$

(V) $\sigma_1\Leftrightarrow\sigma_2\in X$ wtw $\sigma_1,\sigma_2\in X$ bądź $\sigma_1,\sigma_2\notin X$

DOWÓD (I) implikacja prosta wynika z niesprzeczności X w $\mathcal{S}$. Odwrotnie, jeżeli $\sigma\notin X$, to $C_{\mathcal{S}}(X\cup\{\sigma\})=\Sigma^S$, więc $\neg\sigma\in C_{\mathcal{S}}(X)=X$.(IV) implikacja prosta wynika z tego, iż $r_o^S(X)$, gdyż $X=C_{\mathcal{S}}(X)$. Odwrotnie, jeżeli $\sigma_1\notin X$, to $\neg\sigma_1\in X$ i $\neg\sigma_1\Rightarrow(\sigma_1\Rightarrow\sigma_2)\in X$, więc $\sigma_1\Rightarrow\sigma_2\in X$. Jeśli zaś $\sigma_2\in X$, to skoro $\sigma_2\Rightarrow(\sigma_1\Rightarrow\sigma_2)\in X$, więc również $\sigma_1\Rightarrow\sigma_2\in X$.(II), (III), (V) dowodzimy podobnie jak (IV) wykorzystując następujące tautologie: $(p\wedge q)\Rightarrow p$, $(p\wedge q)\Rightarrow q$, $p\Rightarrow(q\Rightarrow(p\wedge q))$, $p\Rightarrow(p\vee q)$, $q\Rightarrow(p\vee q)$, $(p\vee q)\Rightarrow(\neg p\Rightarrow q)$, $(p\Leftrightarrow q)\Rightarrow((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))$. □

Korzystając z tego, iż zbiór Σ^S jest przeliczalny oraz z faktu, że dla inwariantnego systemu odrywaniowego $\mathcal{S}$ nadbudowanego nad klasycznym rachunkiem zdań dla dowolnej formuły σ z Σ^S mamy $C_{\mathcal{S}}(\{\sigma\wedge\neg\sigma\})=\Sigma^S$, można udowodnić w standardowy sposób odpowiednik tw. Lindenbauma o maksymalizacji:

każdy zbiór formuł niesprzeczny w $\mathcal{S}$ jest podzbiorem jakiegoś zbioru maksymalnego w $\mathcal{S}$.

2.2.Zagadnienia semantyczne. Niech $\mathcal{S}$ będzie inwariantnym systemem odrywaniowym nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań o zbiorze aksjomatów specyficznych Ax, tj. $\mathcal{S}$ wyznaczony jest przez parę $(\{r_o^S\},KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax))$. Poniżej podamy warunki wystarczające do niesprzeczności systemu $\mathcal{S}$ oraz dla silnej adekwatości jakiejś klasy modeli z systemem $\mathcal{S}$.

STWIERDZENIE 1. Niech K będzie klasą modeli zawartą w $K^{\emptyset}$, z którą zgodny jest zbiór termów T^{Sn}. Wtedy:

a) jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$, to $C_{\mathcal{S}}(X)\subset C_K^S(X)$ dla każdego $X\subset\Sigma^S$,

b) jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$ i $K\neq\emptyset$, to $\mathcal{S}$ jest niesprzeczny.

DOWÓD a) Ponieważ T^{Sn} jest zgodny z K, więc na mocy stwierdzenia 6 z cz. A (s.46) mamy $SB^{Sn}(SAT(K,\Sigma^S))=SAT(K,\Sigma^S)$. Stąd $SB^{Sn}(Ax)\subset SAT(K,\Sigma^S)$. Ponadto, reguła r_o^S jest normalna w klasie K i $KRZ(\Sigma^S)\subset SAT(K,\Sigma^S)$.

b) $TEZY(\mathcal{S})=C_{\mathcal{S}}(\emptyset)\subset C_K^S(\emptyset)=SAT(K,\Sigma^S)\neq\Sigma^S$. □

STWIERDZENIE 2. Niech $\emptyset\neq K\subset K^{\emptyset}$ oraz $\mathcal{S}$ spełnia warunek:

dla każdego zbioru X maksymalnego w $\mathcal{S}$ isnieje taki model μ w K, że $X=SAT(\mu,\Sigma^S)$.

Wtedy $C^S_K(Y)\subset C_{\mathcal{S}}(Y)$ dla dowolnego $Y\subset\Sigma^S$.

DOWÓD Jeżeli $\sigma\in C^S_K(Y)$, to nie istnieje w K taki model μ, że $Y\subset SAT(\mu,\Sigma^S)$ i $\sigma\notin SAT(\mu,\Sigma^S)$. Zatem na mocy tw. Lindenbauma z 2.1. oraz założonej własności systemu $\mathcal{S}$ wynika, że zbiór $Y\cup\{\neg\sigma\}$ musi być sprzeczny w $\mathcal{S}$, tj. $\sigma\in C_{\mathcal{S}}(Y)$. Istotnie, gdyby $Y\cup\{\neg\sigma\}$ nie był sprzeczny w $\mathcal{S}$, to istniałby zbiór Y_m maksymalny w $\mathcal{S}$ taki, że $Y\cup\{\neg\sigma\}\subset Y_m=SAT(\mu_0,\Sigma^S)$ dla pewnego modelu μ_0 z K, co jest sprzeczne z założeniem. □

Ze stwierdzeń 1 i 2 jako wniosek wyprowadzimy:

TWIERDZENIE 2. Niech $\emptyset\neq K_1\subset K_2\subset K^{\emptyset}$ oraz zbiór T^{Sn} jest zgodny z klasą K_2 (czyli również z K_1). Jeżeli $Ax\subset SAT(K_2,\Sigma^S)$ oraz system $\mathcal{S}$ spełnia względem klasy K_1 warunek podany w stwierdzeniu 2, to

a) $C_{\mathcal{S}}=C^S_{K_1}=C^S_{K_2}$

b) $TEZY(\mathcal{S})=SAT(K_1,\Sigma^S)=SAT(K_2,\Sigma^S)$.

DOWÓD a) dla dowolnego $X\subset\Sigma^S$: $C_{\mathcal{S}}(X)\subset C^S_{K_2}(X)\subset C^S_{K_1}(X)\subset C_{\mathcal{S}}(X)$. □

Jeżeli klasa K jest jedną z klas K_1 bądź K_2 z twierdzenia 2, to bezpośrednio z a (odp. b) wynika, że reguła r nad Σ^S jest wyprowadzalna (odp. dopuszczalna) w systemie $\mathcal{S}$ wtw r jest normalna (odp. niezawodna) względem klasy K. Stąd zaś wynika, że reguła podstawiania r^S_* jest dopuszczalna w $\mathcal{S}$ (tj. nie wyprowadza poza zbiór tez), lecz nie jest wyprowadzalna w $\mathcal{S}$.

§3. Systemy odrywaniowo-podstawieniowe nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań

Ustalmy zbiór termów T^{Sn} i zbiór formuł Σ^S ($sn\subset sc\subset S$).

3.1.Zagadnienia syntaktyczne. System $\mathcal{S}$ wyznaczony przez parę (R,A)

nazywamy odrywaniowo-podstawieniowym wtw $R=\{r^S_o,r^S_*\}$. Odrywaniowo-podstawieniowy system $\mathcal{S}$ jest nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań wtw $\mathcal{S}$ ma zbiór aksjomatów równy $KRZ(\Sigma^S)\cup Ax$, dla pewnego zbioru Ax rozłącznego z $KRZ(\Sigma^S)$. W tym przypadku zbiór Ax nazywamy zbiorem aksjomatów specyficznych systemu $\mathcal{S}$ (Ax wyznacza w sposób jednoznaczny system $\mathcal{S}$).

Nie będziemy wchodzić szczegółowo w zagadnienia syntaktyczne systemów odrywaniowo-podstawieniowych. Zauważmy jedynie, iż mamy:

TWIERDZENIE 3. Systemy wyznaczone odpowiednio przez parę $(\{r^S_o,r^S_*\},KRZ(\Sigma^S)\cup Ax)$ i parę $(\{r^S_o\},KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax))$ mają ten sam zbiór tez.

DOWÓD Wynika to z uwagi 1 podanej w 1.4. oraz faktu, iż $SB^{Sn}(KRZ(\Sigma^S)\cup Ax)=KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax)$. □

3.2.Zagadnienia semantyczne. Niech Ax będzie zbiorem aksjomatów specyficznych odrywaniowo-podstawieniowego systemu $\mathcal{S}$ nadbudowanego nad klasycznym rachunkiem zdań. Poniżej podamy warunki wystarczające odpowiednio dla niesprzeczności systemu $\mathcal{S}$ oraz dla adekwatności jakiejś klasy modeli z systemem $\mathcal{S}$.

STWIERDZENIE 3. Niech K będzie klasą modeli zawartą w $K^{\emptyset}$, z którą zgodny jest zbiór T^{Sn}. Wtedy:

a) jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$, to $TEZY(\mathcal{S})\subset SAT(K,\Sigma^S)$,

b) jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$ i $K\neq\emptyset$, to $\mathcal{S}$ jest niesprzeczny.

DOWÓD Ponieważ T^{Sn} jest zgodny z K, więc reguła r^S_* jest niezawodna w klasie K (1.10.). Ponadto reguła r^S_o jako normalna jest również niezawodna w klasie K. □

Bezpośrednio z twierdzeń 3 i 2b otrzymujemy twierdzenie:

TWIERDZENIE 4. Niech $\emptyset\neq K_1\subset K_2\subset K^{\emptyset}$ oraz zbiór T^{Sn} jest zgodny z klasą K_2. Jeżeli $Ax\subset SAT(K_2,\Sigma^S)$ oraz system $\mathcal{S}$ spełnia względem klasy K_1 warunek podany w stwierdzeniu 2, to $TEZY(\mathcal{S})=SAT(K_1,\Sigma^S)=SAT(K_2,\Sigma^S)$.

§4. Systemy z równością

Będziemy rozważać tylko takie systemy z równością, które są i nwariantnymi systemami odrywaniowyymi (odp. systemami odrywaniowo-podstawieniowymi) nadbudowanymi nad klasycznym rachunkiem zdań oraz które zbudowane są w zbiorze Σ^S takim, że $\equiv \in s$. Ponadto o zbiorach T^{sn} i Σ^S czynimy to założenie co poprzednio.

Zakładamy, że jeżeli $\equiv \in s$, to system $\mathcal{S}$ posiada takie aksjomaty specyficzne, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$ i $\sigma\in\Sigma^S$:

1. $\underline{S}\equiv\underline{P} \in TEZY(\mathcal{S})$
2. dla każdej formuły σ' powstającej z σ po zamianie dowolnie wybranych egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ na egzemplarz zmiennej $\underline{P}$, formuła $\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\sigma')$ należy do $TEZY(\mathcal{S})$.

UWAGA! Formuła σ' nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny przez σ, $\underline{S}$ oraz $\underline{P}$, gdyż zależy od wyboru egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ (dlatego piszemy *dla każdej...*). Jeżeli zmienna $\underline{S}$ nie występuje w σ lub nie wybraliśmy jej żadnego egzemplarza, to $\sigma'=\sigma$.

Oczywiście w rozważanych tu systemach tezami są formuły:

$S\equiv P \Rightarrow P\equiv S$

$(S\equiv M\wedge M\equiv P) \Rightarrow S\equiv P$

W standardowy sposób, za pomocą indukcji, można wykazać:

TWIERDZENIE 5. Jeżeli dla dowolnych $\underline{S},\underline{P},\underline{M}\in\mathbb{ZM}$ zachodzi 1. oraz

jeśli $'\in sn$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow\underline{S}'\equiv\underline{P}')\in TEZY(\mathcal{S})$,

jeśli $\S\in sn\cap\mathbb{FN}^2$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\underline{S}\S\underline{M}\equiv\underline{P}\S\underline{M} \wedge \underline{M}\S\underline{S}\equiv\underline{M}\S\underline{P}))\in TEZY(\mathcal{S})$,

jeśli $\S\in s\cap\mathbb{FZ}^1$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\S\underline{S}\Rightarrow\S\underline{P}))\in TEZY(\mathcal{S})$,

jeśli $\S\in s\cap\mathbb{FZ}^2$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow((\underline{S}\S\underline{M}\Rightarrow\underline{P}\S\underline{M}) \wedge (\underline{M}\S\underline{S}\Rightarrow\underline{M}\S\underline{P})))\in TEZY(\mathcal{S})$,

to $\mathcal{S}$ jest systemem z równością.

DOWÓD Można przeprowadzić go w dwóch etapach. W pierwszym, za pomocą indukcji, pokazujemy, że dla dowolnego termu $\underline{M}$ oraz dowolnego termu $\underline{M}'$ powstałego z $\underline{M}$ po zamianie dowolnie wybranych

egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ na egzemplarz zmiennej $\underline{P}$: $\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow\underline{M}\equiv\underline{M}'\in TEZY(\mathcal{S})$.

W drugim etapie dowodzimy warunek 2 indukcyjnie po podformułach. □

§4. Systemy z równością

Będziemy rozważać tylko takie systemy z równością, które są i nwariantnymi systemami odrywaniowyymi (odp. systemami odrywaniowo-podstawieniowymi) nadbudowanymi nad klasycznym rachunkiem zdań oraz które zbudowane są w zbiorze Σ^S takim, że $\equiv \in s$. Ponadto o zbiorach T^{sn} i Σ^S czynimy to założenie co poprzednio.

Zakładamy, że jeżeli $\equiv \in s$, to system $\mathcal{S}$ posiada takie aksjomaty specyficzne, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$ i $\sigma\in\Sigma^S$:

1. $\underline{S}\equiv\underline{P} \in$ TEZY($\mathcal{S}$)
2. dla każdej formuły σ' powstającej z σ po zamianie dowolnie wybranych egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ na egzemplarz zmiennej $\underline{P}$, formuła $\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\sigma')$ należy do TEZY($\mathcal{S}$).

UWAGA! Formuła σ' nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny przez σ, $\underline{S}$ oraz $\underline{P}$, gdyż zależy od wyboru egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ (dlatego piszemy *dla każdej...*). Jeżeli zmienna $\underline{S}$ nie występuje w σ lub nie wybraliśmy jej żadnego egzemplarza, to $\sigma'=\sigma$.

Oczywiście w rozważanych tu systemach tezami są formuły:

$S\equiv P \Rightarrow P\equiv S$

$(S\equiv M\wedge M\equiv P) \Rightarrow S\equiv P$

W standardowy sposób, za pomocą indukcji, można wykazać:

TWIERDZENIE 5. Jeżeli dla dowolnych $\underline{S},\underline{P},\underline{M}\in\mathbb{ZM}$ zachodzi 1. oraz

jeśli $'\in sn$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow\underline{S}'\equiv\underline{P}')\in$TEZY($\mathcal{S}$),

jeśli $\S\in sn\cap\mathbb{FN}^2$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\underline{S}\S\underline{M}\equiv\underline{P}\S\underline{M} \wedge \underline{M}\S\underline{S}\equiv\underline{M}\S\underline{P}))\in$TEZY($\mathcal{S}$),

jeśli $\S\in sn\cap\mathbb{FZ}^1$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\S\underline{S}\Rightarrow\S\underline{P}))\in$TEZY($\mathcal{S}$),

jeśli $\S\in sn\cap\mathbb{FZ}^2$, to $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow((\underline{S}\S\underline{M}\Rightarrow\underline{P}\S\underline{M}) \wedge (\underline{M}\S\underline{S}\Rightarrow\underline{M}\S\underline{P})))\in$TEZY($\mathcal{S}$),

to $\mathcal{S}$ jest systemem z równością.

DOWÓD Można przeprowadzić go w dwóch etapach. W pierwszym, za pomocą indukcji, pokazujemy, że dla dowolnego termu $\underline{M}$ oraz dowolnego termu $\underline{M}'$ powstałego z $\underline{M}$ po zamianie dowolnie wybranych

egzemplarzy zmiennej $\underline{S}$ na egzemplarz zmiennej $\underline{P}$: $\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow\underline{M}\equiv\underline{M}'\in$TEZY($\mathcal{S}$).

W drugim etapie dowodzimy warunek 2 indukcyjnie po podformułach. □

Rozdział II

Porównywanie systemów aksjomatycznych

Załóżmy, że zbiory T^{sn} i Σ^S (odp. $T^{sn\cdot}$ i $\Sigma^{S\cdot}$) wyznaczone są odpowiednio przez zbiory symboli $sn \subset sc \subset \mathbb{S}$ (odp. $sn\cdot \subset cs\cdot \subset \mathbb{S}$). Niech $\mathcal{S}$ (odp. $\mathcal{S}^{\cdot}$) będzie systemem aksjomatycznym zbudowanym w Σ^S (odp. $\Sigma^{S\cdot}$) i wyznaczonym przez parę (R,A) (odp. $(R^{\cdot},A^{\cdot})$). Zatem $\mathcal{S}$ (odp. $\mathcal{S}^{\cdot}$) dany jest przez (s,R,A) (odp. $(s\cdot,R^{\cdot},A^{\cdot})$).

§1. Rozszerzenia systemów

Mówimy, że system $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$ wtw $sc s\cdot$, $A \subset TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})$ oraz R zawarty jest w zbiorze reguł wyprowadzalnych ze zbiorów $A^{\cdot}$ i $R^{\cdot}$. Wtedy dla dowolnego $X \subset \Sigma^S$ zachodzi $C_{\mathcal{S}}(X) \subset C_{\mathcal{S}^{\cdot}}(X)$. Mówimy, że systemy $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}^{\cdot}$ są równoważne wtw $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest rozszerzeniem $\mathcal{S}$ i odwrotnie. Wtedy $C_S\cdot(X)=C_S(X)$, czyli $TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})=TEZY(\mathcal{S})$.

Rozszerzenie $\mathcal{S}^{\cdot}$ systemu $\mathcal{S}$ jest konserwatywne wtw $TEZY(\mathcal{S})= =TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})\cap\Sigma^S$ oraz wszystkie obcięcia reguł z $R^{\cdot}$ na zbiorze Σ^S są wyprowadzalne ze zbiorów A i R. Wówczas dla dowolnego $X \subset \Sigma^S$ mamy $C_{\mathcal{S}^{\cdot}}(X)=C_{\mathcal{S}}(X)$.

§2. Definicyjne rozszerzenia systemów nadbudowanych nad klasycznym rachunkiem zdań

Załóżmy teraz, że $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}^{\cdot}$ są inwariantnymi systemami odrywa-

niowymi (odp. odrywaniowo-podstawieniowymi) nadbudowanymi nad klasycznym rachunkiem zdań oraz wyznaczonymi odpowiednio przez zbiory aksjomatów specyficznych Ax i $Ax\cdot$. Zatem, zgodnie z określeniami z 2.1. i 3.1. rozdz. I, mamy $R=\{r_o^S\}$, $A=KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{sn}(Ax)$, $R^{\cdot}=\{r_o^{S\cdot}\}$ oraz $A^{\cdot}=KRZ(\Sigma^{S\cdot})\cup SB^{sn}(Ax\cdot)$ (odp. $R=\{r_o^S, r_*^S\}$, $A=KRZ(\Sigma^S)\cup Ax$, $R^{\cdot}=\{r_o^{S\cdot}, r_*^{S\cdot}\}$ oraz $A^{\cdot}=KRZ(\Sigma^{S\cdot})\cup Ax\cdot$).

2.1.Rozszerzenia za pomocą definicji symbolu z $\mathbb{FZ}\setminus s$. Niech $\S\in\mathbb{FZ}^1\setminus s$ (odp. $\mathbb{FZ}^2\setminus s$) oraz $s\cdot=s\cup\{\S\}$. Przyjmijmy $(def\S) = (\S\underline{S}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S}))$ dla pewnych $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$ i $\sigma(\underline{S})\in\Sigma^S$ (odp. $(def\S) = (\underline{S}\S\underline{P}\Leftrightarrow\sigma(\underline{S},\underline{P}))$ dla pewnych różnych $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$ i pewnej $\sigma(\underline{S},\underline{P})\in\Sigma^S$). Niech $Ax\cdot=Ax\cup\{(def\S)\}$. Formułę $(def\S)$ nazywamy definicją symbolu § w systemie $\mathcal{S}^{\cdot}$. Oczywiście, system $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$. Pokażemy, że jest ono konserwatywne. Ponieważ reguły $r_o^{S\cdot}$ i $r_*^{S\cdot}$ obcięte do Σ^S pokrywają się odpowiednio z regułami r_o^S i r_*^S więc wystarczy udowodnić, iż $TEZY(\mathcal{S})=TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})\cap\Sigma^S$.

Zdefiniujemy funkcję tłumaczenia t formuł z $\Sigma^{S\cdot}$ na formuły z Σ^S w następujący sposób rekurencyjny: dla σ_1,σ_2 z $\Sigma^{S\cdot}$

jeśli σ_1 jest formułą atomową w Σ^S, to $t(\sigma_1)=\sigma_1$,

jeśli $\sigma_1=\S\underline{M}$ (odp. $\underline{M}\S\underline{Q}$) dla pewnego $\underline{M}\in T^{sn}$ (odp. $\underline{M},\underline{Q}\in T^{sn}$), to

$t(\sigma_1)=\sigma(\underline{S}/\underline{M})$ (odp. $t(\sigma_1)=\sigma(\underline{S}/\underline{M},\underline{P}/\underline{Q})$),

$t(\neg\sigma_1)=\neg t(\sigma_1)$,

$t(\sigma_1\,\%\,\sigma_2)=(t(\sigma_1)\%t(\sigma_2))$ dla $\%\in\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Funkcja t ma następujące właściwości syntaktyczne:

LEMAT 1. Dla dowolnych $X\subset\Sigma^{S\cdot}$ oraz $\sigma\in\Sigma^{S\cdot}$:

a) $(\sigma\Leftrightarrow t(\sigma))\in TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})$,

b) dla systemu inwariantnego : $\sigma\in C_{\mathcal{S}^{\cdot}}(X)$ wtw $t(\sigma)\in C_{\mathcal{S}}(t(X))$,

dla podstawieniowego : $\sigma\in TEZY(\mathcal{S}^{\cdot})$ wtw $t(\sigma)\in TEZY(\mathcal{S})$.

Stąd wynika, że $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem $\mathcal{S}$.

DOWÓD a) łatwo otrzymamy stosując regułę ekstensjonalności dla $\Leftrightarrow$ w klasycznym rachunku zdań.

b) Jeżeli ciąg $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ jest wyprowadzeniem formuły σ w systemie $\mathcal{S}^{\cdot}$ z domkniętą aksjomatyką (odp. podstawieniowym) ze zbioru X (odp. $\emptyset$), to ciąg $t(\sigma_1),\ldots,t(\sigma_n)$ jest wyprowadzeniem formuły $t(\sigma)$ ze zbioru $t(X)$ (odp. $\emptyset$) w systemie $\mathcal{S}$.

Odwrotnie, budujemy odpowiedni ciąg dowodowy z wykorzystaniem *a*). □

Z twierdzenia 5 i z lematu 1 otrzymujemy:

WNIOSEK 1. Jeżeli $\mathcal{S}$ jest systemem z równością, to również $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest systemem z równością.

DOWÓD Zauważmy, że $t(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\S\underline{S}\Rightarrow\S\underline{P})) = (\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\sigma(\underline{S})\Rightarrow\sigma(\underline{P}))\in)\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})$ (odp. podobnie dla $\S\in\mathbb{FZ}^2$), więc $(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\S\underline{S}\Rightarrow\S\underline{P}))\in\mathrm{TEZY}(\mathcal{S}^{\cdot})$. □

Funkcja t ma następujące właściwości semantyczne:

LEMAT 2. Niech zbiór termów T^{sn} będzie zgodny z klasą modeli K zawartą w $K^{\emptyset}$ oraz $(\mathrm{def}\S)\in\mathrm{SAT}(K,\Sigma^{S\cdot})$. Wtedy dla $\sigma\in\Sigma^{S\cdot}$ zachodzi:

a) dla dowolnego $\mu\in K$: $\sigma\in\mathrm{SAT}(\mu,\Sigma^{S\cdot})$ wtw $t(\sigma)\in\mathrm{SAT}(\mu,\Sigma^{S})$,

b) dla dowolnego $X\subset\Sigma^{S\cdot}$: $\sigma\in C_K^{S\cdot}(X)$ wtw $t(\sigma)\in C_K^{S}(t(X))$,

Stąd $\sigma\in\mathrm{SAT}(K,\Sigma^{S\cdot})$ wtw $t(\sigma)\in\mathrm{SAT}(K,\Sigma^{S})$.

DOWÓD Dzięki zgodności zbioru T^{sn} z klasą K mamy $\mathrm{SB}^{sn}(\mathrm{SAT}(K,\Sigma^{S\cdot}))=\mathrm{SAT}(K,\Sigma^{S\cdot})$. □

2.2.Rozszerzenia za pomocą definicji symbolu z $\mathbb{FN}^2\setminus sn$. Załóżmy, że $\mathcal{S}$ jest systemem z równością. Niech $\S\in\mathbb{FN}^2\setminus sn$, $sn\cdot=sn\cup\{\S\}$ i $s\cdot=s\cup\{\S\}$. Przyjmijmy $(\mathrm{def}\S) = (\underline{S}\S\underline{P}\equiv\underline{M}(\underline{S},\underline{P}))$ dla pewnych różnych $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$ i pewnego $\underline{M}(\underline{S},\underline{P})\in T^{sn}$. Niech $Ax\cdot=Ax\cup\{(\mathrm{def}\S)\}$. Oczywiście, system $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$. Pokażemy, że jest ono konserwatywne (podobnie jak w 2.1. wystarczy wykazać, iż $\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})=\mathrm{TEZY}(\mathcal{S}^{\cdot})\cap\Sigma^{S}$).

Zdefiniujmy rekurencyjnie funkcję tłumaczenia z $T^{sn\cdot}$ na T^{sn} w następujący sposób: dla $\underline{Q},\underline{S}_1,\underline{P}_1$ z $T^{sn\cdot}$

jeżeli $\underline{Q}\in\mathbb{ZM}\cup\{V\}$, to $t(\underline{Q})=\underline{Q}$,

jeżeli $\underline{Q}=\underline{S}_1'$, to $t(\underline{Q})=t(\underline{S}_1)'$

jeżeli $\underline{Q}=(\underline{S}_1\,\%\,\underline{P}_1)$ dla $\%\in sn$, to $t(\underline{Q})=(t(\underline{S}_1)\%t(\underline{P}_1))$,

jeżeli $\underline{Q}=(\underline{S}_1\S\underline{P}_1)$, to $t(\underline{Q})=\underline{M}(\underline{S}/\underline{S}_1,\underline{P}/\underline{P}_1)$.

Tak określoną na $T^{sn\cdot}$ funkcję t przedłużamy na zbiór $\Sigma^{S\cdot}$ następującymi warunkami rekurencyjnymi:

dla formuły atomowej $\sigma(\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_n)\in\Sigma^{S\cdot}$ i termów $\underline{Q}_1\ldots\underline{Q}_n\in T^{sn\cdot}$

$t(\sigma(\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_n))=\sigma(t(\underline{Q}_1),\ldots,t(\underline{Q}_n))$,

dla symboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ oraz $\Leftrightarrow$ przyjmujemy warunki rekurencyjne takie jak w 2.1.

Wykorzystując własności systemów z równością, łatwo udowodnić, podobnie jak lemat 1:

LEMAT 3. Funkcja t ma te same właściwości syntaktyczne, które sformułowaliśmy w lemacie 1. □

Z twierdzenia 5 oraz z lematu 3 otrzymujemy wniosek:

WNIOSEK 2. System $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest systemem z równością.

DOWÓD Zauważmy, że $t(\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\underline{S}\S\underline{Q}\equiv\underline{P}\S\underline{Q}))=\underline{S}\equiv\underline{P}\Rightarrow(\underline{M}(\underline{S},\underline{Q})\equiv\underline{M}(\underline{P},\underline{Q}))\in\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})$, gdyż $\mathcal{S}$ jest systemem z równością. Podobnie z inną kolejnością zmiennych. □

LEMAT 4. Funkcja t ma te same właściwości semantyczne, które sformułowaliśmy w lemacie 2. □

W pracy tej nie będziemy definiować stałej $'$.

2.3.Rozszerzenia za pomocą definicji stałej V. Ponownie załóżmy, że system $\mathcal{S}$ jest z równością. Mówimy, że term $\underline{M}(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_n)$ z T^{sn} jest niezmienniczy w systemie $\mathcal{S}$ wtw dla dowolnych zmiennych $\underline{P}_1,\ldots,\underline{P}_n$ formuła $\underline{M}(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_n)\equiv\underline{M}(\underline{S}_1/\underline{P}_1,\ldots,\underline{S}_n/\underline{P}_n)$ należy do zbioru $\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})$. Załóżmy również, że $V\notin s$, $s\cdot=s\cup\{V\}$ oraz $Ax\cdot=Ax\cup\{(\mathrm{def}V)\}$, gdzie $(\mathrm{def}V) = V\equiv\underline{M}$ dla pewnego termu niezmienniczego $\underline{M}\in T^{sn}$. Pokażemy, że $\mathcal{S}^{\cdot}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem $\mathcal{S}$.

Niech $t(\sigma)$ należące do Σ^{S} powstaje z σ należącej do $\Sigma^{S\cdot}$ po zamianie każdego egzemplarza stałej V na egzemplarz termu $\underline{M}$. Funkcja t ma wszystkie właściwości syntaktyczne sformułowane w lemacie 1 (3) i wniosku 2. Ponadto ma właściwości semantyczne sformułowane

w lemacie 2 (4) - tutaj wymagamy aby dla każdego modelu $\mu=(U,d)$ z klasy K, $D^U(\underline{M})=U$.

2.4.Rozszerzenia definicyjne. Mówimy, że system $\mathcal{S}'$ jest definicyjnym rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$ wtw $\mathcal{S}'$ otrzymaliśmy z $\mathcal{S}$ za pomocą skończonej ilości rozszerzeń opisanych w punktach 2.1.-2.3. W tym przypadku istnieje funkcja tłumaczenia t określona na $\Sigma^{S'}$ i o wartościach w Σ^S, spełniająca własności opisane w lematach 1-4. Zatem $\mathcal{S}'$ jest konserwatywnym rozszerzeniem $\mathcal{S}$.

STWIERDZENIE 4. Jeżeli zbiór termów $T^{Sn'}$ jest zgodny z klasą modeli K zawartą w $K^{\emptyset}$, to

klasa K jest silnie adekwatna (odp. adekwatna) z $\mathcal{S}'$ wtw klasa K jest silnie adekwatna (odp. adekwatna) z $\mathcal{S}$ oraz wszystkie definicje użyte do rozszerzeń należą do $SAT(K,\Sigma^{S'})$. □

2.5.Równoważność definicyjna. Dwa systemy $\mathcal{S}_1$ oraz $\mathcal{S}_2$ tego samego z rozpatrywanych tutaj typów (tj. oba inwariantne z regułą odrywania bądź oba z regułami podstawiania i odrywania) są definicyjnie równoważne wtw istnieją ich definicyjne rozszerzenia $\mathcal{S}_1'$ i $\mathcal{S}_2'$, które są równoważne.

STWIERDZENIE 5. Załóżmy, że zbiory termów $T^{Sn'_1}$ i $T^{Sn'_2}$ są zgodne z klasą modeli K zawartą w $K^{\emptyset}$. Jeżeli systemy $\mathcal{S}_1'$ i $\mathcal{S}_2'$ są równoważne (tzn. systemy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są definicyjnie równoważne) oraz wszystkie definicje użyte do rozszerzenia należą odpowiednio do zbiorów $SAT(K,\Sigma^{S'_1})$ i $SAT(K,\Sigma^{S'_2})$, to

klasa K jest silnie adekwatna (odp. adekwatna) względem systemu $\mathcal{S}_1$ wtw klasa K jest silnie adekwatna (odp. adekwatna) względem systemu $\mathcal{S}_2$. □

CZĘŚĆ C
SYSTEMY BEZ FUNKTORÓW NAZWOTWÓRCZYCH

Komentarz do konstrukcji części C i D oraz do uzyskanych tam wyników

I

1. Dowolny zbiór symboli s zawarty w $\mathbb{S}$ i taki, że $s\cap\mathbb{FZ}^2\neq\emptyset$, wyznacza w sposób jednoznaczny zbiór formuł zdaniowych Σ^S, zaś zbiór sn zawarty w $s\cap\mathbb{SN}$ - wyznacza zbiór termów T^{Sn}. Teraz przyjmując podzbiór Ax zbioru Σ^S (rozłączny z $KRZ(\Sigma^S)$), wyznaczamy pewien aksjomatyczny system dedukcyjny $\mathcal{S}$ w poniższy sposób jednoznaczny:
- jedną regułą pierwotną systemu $\mathcal{S}$ jest reguła odrywania r^S_{δ}
- aksjomatami systemu $\mathcal{S}$ są wszystkie formuły należące do zbioru $KRZ(\Sigma^S)\cup SB^{Sn}(Ax)$ i tylko one, tj. wszystkie podstawienia tautologii klasycznego rachunku zdań formułami z Σ^S oraz wszystkie podstawienia formuł z Ax termami z T^{Sn}.

Zatem $\mathcal{S}$ jest inwariantnym systemem odrywaniowym nadbudowanym w Σ^S nad klasycznym rachunkiem zdań, przy czym Ax jest zbiorem aksjomatów specyficznych tego systemu. System $\mathcal{S}$ jest w ten sposób wyznaczony jednoznacznie przez przyjęte zbiory s oraz Ax.

Zbiór Ax będzie zawsze skończony i jego elementy będą bezpośrednio wymienione. Będzie przy tym oczywiste, że dla pewnej klasy modeli K (niepustej i zawartej w $K^{\emptyset}$), z którą zgodny jest zbiór T^{Sn}, zachodzi zawieranie $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$. Stąd na mocy stwier-

dzenia 1 z cz. B (s. 63), $TEZY(\mathcal{S})\subset SAT(K,\Sigma^S)\neq\Sigma^S$.

UWAGA! Zbiór s nie będzie w ogóle wyróżniany w sytuacji, gdy ma się składać dokładnie z tych symboli, które występują jako stałe w formułach należących do Ax.

2. Załóżmy, że dla pewnej klasy modeli K_2 (niepustej i zawartej w $K^{\emptyset}$), z którą zgodny jest zbiór T^{sn}, $Ax\subset SAT(K_2,\Sigma^S)$. Ponadto załóżmy, że dla pewnej niepustej i zawartej w K_2 klasy K_1, dla systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego w sposób podany w 1 przez zbiory s oraz Ax zachodzi warunek:

(x) dla dowolnego zbioru $max\subset\Sigma^S$ maksymalnego w systemie $\mathcal{S}$ istnieje taki model μ w K_1, że $max=SAT(\mu,\Sigma^S)$.

Wtedy na mocy twierdzenia 2 z cz. B (s.64), klasy K_1 i K_2 są silnie adekwatne względem systemu $\mathcal{S}$.

W punktach zatytułowanych *silna adekwatność klasy K_1 dla Ax*, będziemy udowadniać warunek (x) dla klasy K_1 i systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego jak wyżej. Przez *max* oznaczymy dowolnie wybrany zbiór maksymalny w systemie $\mathcal{S}$. Dla zbioru tego będzie utworzony model, oznaczony przez μ, który ma należeć do K_1 oraz dla którego ma zachodzić równość : $max=SAT(\mu,\Sigma^S)$. Warunek $\sigma\in max$ wtw $\sigma\in SAT(\mu,\Sigma^S)$, będziemy dowodzić jedynie dla formuł atomowych z Σ^S. Korzystać będziemy przy tym z faktu, iż $TEZY(\mathcal{S})\subset max$ (s. 61), oraz z domknięcia zbioru *max* względem reguły odrywania. Dla pozostałych formuł powyższy warunek łatwo udowodnić indukcyjnie, korzystając z własności zbioru *max* podanych w twierdzeniu 1 w cz. B (s. 62) oraz z podobnych własności zbioru $SAT(\mu,\Sigma^S)$ związanych z jego rekurencyjnym określeniem.

UWAGA! W każdym konkretnym przypadku w części C model μ będzie miał uniwersum przeliczalne (odp. co najwyżej przeliczalne). Będzie to widoczne w sposób oczywisty, więc nie będziemy tego specjalnie podkreślać. Zatem silnie adekwatne względem systemu $\mathcal{S}$ będą nie tylko klasy K_1 i K_2, lecz również ich przecięcia z klasą wszystkich modeli o uniwersum przeliczalnym (odp. co najwyżej przeliczalnym). Ponieważ przecięcia takie zachowują inkluzję, więc wszystkie założenia twierdzenia 2 z cz. B będą spełnione.

3. Załóżmy, że systemy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są wyznaczone tak jak w 1 odpowiednio przez s_1,Ax_1 oraz s_2,Ax_2, przy czym $s_1\subset s_2$ (odp. $s_1=s_2$). Jeżeli pewna klasa modeli K jest silnie adekwatna względem tych systemów, to system $\mathcal{S}_2$ jest konserwatywnym rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}_1$ (odp. systemy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są równoważne). Istotnie, $TEZY(\mathcal{S}_1)=SAT(K,\Sigma^S1) =SAT(K,\Sigma^S2)\cap\Sigma^S2=TEZY(\mathcal{S}_2)\cap\Sigma^S1$ (odp. gdy $s_1=s_2$, to $\Sigma^S1=\Sigma^S2$, więc $TEZY(\mathcal{S}_1)=TEZY(\mathcal{S}_2)$).

4. W punktach zatytułowanych *rozszerzenia definicyjne* będziemy dołączać do zbioru Ax pewną skończoną ilość definicji oraz do zbioru s - pewną skończoną ilość symboli zdefiniowanych. Zbiór $s^\bullet$ powstały przez rozszerzenie zbioru s o symbole zdefiniowane oraz zbiór $Ax^\bullet\subset\Sigma^{S^\bullet}$ powstały przez rozszerzenie zbioru Ax o przyjęte definicje, będą wyznaczały - tak jak w 1 - system $\mathcal{S}^\bullet$ będący definicyjnym rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$. Zakładamy przy tym, że jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$ dla pewnej klasy modeli K, z którą zgodny jest zbiór T^{sn}, to również zbiór $T^{sn^\bullet}$ (wyznaczony jednoznacznie przez $s^\bullet$) zgodny jest z klasą K oraz wszystkie dołączone definicje należą do $SAT(K,\Sigma^{S^\bullet})$.

Wnioski dotyczące silnej adekwatności dla tak otrzymanego systemu $\mathcal{S}^\bullet$, wypływać będą ze stwierdzenia 4 w cz. B (s.71). Konkretne definicje wymienione są w §2. rozdz. IV cz. A.

5. Załóżmy, że systemy $\mathcal{S}_1^\bullet$ i $\mathcal{S}_2^\bullet$ są odpowiednio definicyjnymi rozszerzeniami (jak w 4) systemów $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ wyznaczonych jak w 1. Jeżeli pewna klasa modeli jest silnie adekwatna względem systemów $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, to zgodnie ze stwierdzeniem 4 z cz. B (s. ??), klasa ta jest również silnie adekwatna względem systemów $\mathcal{S}_1^\bullet$ oraz $\mathcal{S}_2^\bullet$. Zatem

dzenia 1 z cz. B (s. 63), $TEZY(\mathcal{S})\subset SAT(K,\Sigma^S)\neq\Sigma^S$.

UWAGA! Zbiór s nie będzie w ogóle wyróżniany w sytuacji, gdy ma się składać dokładnie z tych symboli, które występują jako stałe w formułach należących do Ax.

2. Załóżmy, że dla pewnej klasy modeli K_2 (niepustej i zawartej w $K^{\emptyset}$), z którą zgodny jest zbiór T^{sn}, $Ax\subset SAT(K_2,\Sigma^S)$. Ponadto załóżmy, że dla pewnej niepustej i zawartej w K_2 klasy K_1, dla systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego w sposób podany w 1 przez zbiory s oraz Ax zachodzi warunek:

(x) dla dowolnego zbioru $max\subset\Sigma^S$ maksymalnego w systemie $\mathcal{S}$ istnieje taki model μ w K_1, że $max=SAT(\mu,\Sigma^S)$.

Wtedy na mocy twierdzenia 2 z cz. B (s.64), klasy K_1 i K_2 są silnie adekwatne względem systemu $\mathcal{S}$.

W punktach zatytułowanych *silna adekwatność klasy K_1 dla Ax*, będziemy udowadniać warunek (x) dla klasy K_1 i systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego jak wyżej. Przez *max* oznaczymy dowolnie wybrany zbiór maksymalny w systemie $\mathcal{S}$. Dla zbioru tego będzie utworzony model, oznaczony przez μ, który ma należeć do K_1 oraz dla którego ma zachodzić równość : $max=SAT(\mu,\Sigma^S)$. Warunek $\sigma\in max$ wtw $\sigma\in SAT(\mu,\Sigma^S)$, będziemy dowodzić jedynie dla formuł atomowych z Σ^S. Korzystać będziemy przy tym z faktu, iż $TEZY(\mathcal{S})\subset max$ (s. 61), oraz z domknięcia zbioru *max* względem reguły odrywania. Dla pozostałych formuł powyższy warunek łatwo udowodnić indukcyjnie, korzystając z własności zbioru *max* podanych w twierdzeniu 1 w cz. B (s. 62) oraz z podobnych własności zbioru $SAT(\mu,\Sigma^S)$ związanych z jego rekurencyjnym określeniem.

UWAGA! W każdym konkretnym przypadku w części C model μ będzie miał uniwersum przeliczalne (odp. co najwyżej przeliczalne). Będzie to widoczne w sposób oczywisty, więc nie będziemy tego specjalnie podkreślać. Zatem silnie adekwatne względem systemu $\mathcal{S}$ będą nie tylko klasy K_1 i K_2, lecz również ich przecięcia z klasą wszystkich modeli o uniwersum przeliczalnym (odp. co najwyżej przeliczalnym). Ponieważ przecięcia takie zachowują inkluzję, więc wszystkie założenia twierdzenia 2 z cz. B będą spełnione.

3. Załóżmy, że systemy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są wyznaczone tak jak w 1 odpowiednio przez s_1,Ax_1 oraz s_2,Ax_2, przy czym $s_1\subset s_2$ (odp. $s_1=s_2$). Jeżeli pewna klasa modeli K jest silnie adekwatna względem tych systemów, to system $\mathcal{S}_2$ jest konserwatywnym rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}_1$ (odp. systemy $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ są równoważne). Istotnie, $TEZY(\mathcal{S}_1)=SAT(K,\Sigma^S_1)=SAT(K,\Sigma^S_2)\cap\Sigma^S_2=TEZY(\mathcal{S}_2)\cap\Sigma^S_1$ (odp. gdy $s_1=s_2$, to $\Sigma^S_1=\Sigma^S_2$, więc $TEZY(\mathcal{S}_1)=TEZY(\mathcal{S}_2)$).

4. W punktach zatytułowanych *rozszerzenia definicyjne* będziemy dołączać do zbioru Ax pewną skończoną ilość definicji oraz do zbioru s - pewną skończoną ilość symboli zdefiniowanych. Zbiór $s\bullet$ powstały przez rozszerzenie zbioru s o symbole zdefiniowane oraz zbiór $Ax\bullet\subset\Sigma^{S\bullet}$ powstały przez rozszerzenie zbioru Ax o przyjęte definicje, będą wyznaczały - tak jak w 1 - system $\mathcal{S}^{\bullet}$ będący definicyjnym rozszerzeniem systemu $\mathcal{S}$. Zakładamy przy tym, że jeżeli $Ax\subset SAT(K,\Sigma^S)$ dla pewnej klasy modeli K, z którą zgodny jest zbiór T^{sn}, to również zbiór $T^{sn\bullet}$ (wyznaczony jednoznacznie przez $s\bullet$) zgodny jest z klasą K oraz wszystkie dołączone definicje należą do $SAT(K,\Sigma^{S\bullet})$.

Wnioski dotyczące silnej adekwatności dla tak otrzymanego systemu $\mathcal{S}^{\bullet}$, wypływać będą ze stwierdzenia 4 w cz. B (s.71). Konkretne definicje wymienione są w §2. rozdz. IV cz. A.

5. Załóżmy, że systemy $\mathcal{S}^{\bullet}_1$ i $\mathcal{S}^{\bullet}_2$ są odpowiednio definicyjnymi rozszerzeniami (jak w 4) systemów $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ wyznaczonych jak w 1. Jeżeli pewna klasa modeli jest silnie adekwatna względem systemów $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, to zgodnie ze stwierdzeniem 4 z cz. B (s. ??), klasa ta jest również silnie adekwatna względem systemów $\mathcal{S}^{\bullet}_1$ oraz $\mathcal{S}^{\bullet}_2$. Zatem

w sytuacji, gdy systemy $\mathcal{S}_1^*$ i $\mathcal{S}_2^*$ są zbudowane w jednym zbiorze, są one, na mocy uwagi z 3, równoważne. Zatem w sytuacji tej, systemy $\mathcal{S}_1$ oraz $\mathcal{S}_2$ są definicyjnie równoważne.

6. Badając silną adekwatność pewnej klasy modeli K względem pewnego systemu $\mathcal{S}$, będziemy również korzystać ze stwierdzenia 5 z cz. B (s. 71). Znajdziemy inny system względem którego silnie adekwatna jest klasa K oraz który jest definicyjnie równoważny z $\mathcal{S}$ (tę definicyjną równoważność pokazujemy poprzez odpowiednie bezpośrednie wyprowadzenia).

II

Dla systemu $\mathcal{S}$ wyznaczonego przez zbiory s i Ax jak w I, na mocy twierdzenia 3 z cz. B (s. 65) mamy $\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})=\mathrm{Cn}^S(Ax\cup\mathrm{KRZ}(\Sigma^S))$, gdzie Cn^S jest podstawieniowo-odrywaniową operacją konsekwencji w zbiorze Σ^S (s. 39).

W przypadku gdy zbiór T^{Sn} zgodny jest z klasą modeli K, to zbiór $\mathrm{SAT}(K,\Sigma^S)$ jest teorią względem operacji Cn^S (ss. 40 i 46). Aksjomatyką tej teorii nazywamy taki zbiór A, że $\mathrm{SAT}(K,\Sigma^S)=\mathrm{Cn}^S(A)$. Zatem w sytuacji gdy $\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})=\mathrm{SAT}(K,\Sigma^S)$, zbiór $Ax\cup\mathrm{KRZ}(\Sigma^S)$ jest aksjomatyką teorii $\mathrm{SAT}(K,\Sigma^S)$.

III

Można również uważać, że zbiory s oraz $Ax\subset\Sigma^S$ wyznaczają pewien system $\mathcal{S}'$ odrywaniowo-podstawieniowy nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań. Jego pierwotnymi regułami będą r_o^S i r_*^S zaś aksjomatami - formuły należące do $\mathrm{KRZ}(\Sigma^S)\cup Ax$. Na mocy twierdzenia

3 z cz. B (s. 66) mamy $\mathrm{TEZY}(\mathcal{S}')=\mathrm{TEZY}(\mathcal{S})$, gdzie $\mathcal{S}$ jest inwariantnym systemem wyznaczonym przez s oraz Ax jak w I. Ponadto, korzystając z odpowiednich właściwości systemu $\mathcal{S}$, uzyskamy odpowiednie właściwości systemu $\mathcal{S}'$, zmieniając tylko termin *silna adekwatność* na termin *adekwatność*.

IV

Formuły używane jako aksjomaty w części C (odp. D) będą miały oznaczenia podpadające pod schemat (Cx.y.z) (odp. (Dx.y.z)), gdzie x stoi w miejscu numeru rozdziału, y - w miejscu paragrafu, w którym wymieniamy daną formułę, zaś z stoi w miejscu bieżącego numeru w danym paragrafie.

Rozdział I

Współczesne systemy sylogistyczne

Termin *system sylogistyczny* będziemy stosować do tych systemów, których zbiór formuł zdaniowych wyznaczony jest przez jakiś zbiór symboli zawarty w zbiorze $\mathbb{FSYL}\cup\{V\}$ (s .47). Do współczesnych zaliczamy te systemy, w zastosowaniach których dopuszczalne jest podstawianie nazw pustych. Zatem w badaniach semantycznych tych systemów musimy brać pod uwagę również te modele, w których zbiór pusty należy do zbioru wartości funkcji denotacji.

Jeżeli $s\subset\mathbb{FSYL}$ (tzn. $V\notin s$), to na mocy stwierdzenia 4 cz. A (s. 42) $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{S})=TAUT(\Sigma^{S})$. Równości te, w badanych przypadkach, wynikać będą również z udowadnianych silnych adekwatności klas $K^{\emptyset}$ i K względem odpowiednich systemów sylogistycznych bez symbolu V (patrz I 2 w komentarzu do części C i D).

§1. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv})$ i $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,V})$

Ze stwierdzenia 8 w cz. A (s. 50) wynika, że $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv})=TAUT(\sum^{\equiv})=TAUT^{t}(\sum^{\equiv})$ i $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,V})=TAUT(\sum^{\equiv,V})=TAUT^{t}(\sum^{\equiv,V})$. Równości te będą wynikały również z udowodnionej poniżej silnej adekwatności klas $K^{\emptyset}$,K i K^{np} względem pewnego systemu.

1.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{\equiv}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv})$ będzie zbiorem złożonym z poniższych formuł:

(C1.1.1) $S\equiv S$

(C1.1.2) $S\equiv P\Rightarrow P\equiv S$

(C1.1.3) $(S\equiv M\wedge M\equiv P)\Rightarrow S\equiv P$

Zbiór ten wyznacza dwa systemy: w zbiorze $\sum^{\equiv}$ i zbiorze $\sum^{\equiv,V}$.

1.2.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}^{\equiv}$. Dla dowolnego $max\subset\sum^{\equiv,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{np}$, w którym $U:=\mathbb{ZM}\cup\{V\}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$: $d(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U : \underline{M}\equiv\underline{S}\in max\}$. Funkcję d przedłużamy na T^{V} do funkcji D warunkiem $D(V)=U$. Oczywiście, $V\equiv V$, jako podstawienie formuły (C1.1.1), należy do max. Stąd łatwo pokażać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z T^{V} : $\underline{S}\equiv\underline{P}\in max$ wtw $\underline{S}\equiv\underline{P}\in SAT(\mu,\sum^{\equiv,V})$.

Podobnie dla systemu w $\sum^{\equiv}$: dla $max\subset\sum^{\equiv}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{np}$, w którym $U:=\mathbb{ZM}$, zaś d określamy tym samym wzorem co poprzednio.

§2. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a})$ i $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,V})$

Ze stwierdzenia 8 w cz. A wynika, że $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a})=TAUT(\sum^{a})=TAUT^{t}(\sum^{a})$ i $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,V})=TAUT(\sum^{a,V})=TAUT^{t}(\sum^{a,V})$ (oraz jak w §1).

2.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a})$ będzie zbiorem złożonym z poniższych formuł:

(C1.2.1) SaS

(C1.2.2) $(SaM\wedge MaP)\Rightarrow SaP$

zaś $\mathbf{Ax}^{a,V}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,V})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a}$ o formułę

(C1.2.3) SaV

2.2.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}^{a,V}$. Dla $max\subset\sum^{a,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{np}$, w którym $U:=T^{V}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\underline{M} : \underline{M}a\underline{S}\in max\}$. Łatwo pokazać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z T^{V} : $\underline{S}a\underline{P}\in max$ wtw $\underline{S}a\underline{P}\in SAT(\mu,\sum^{a,V})$, tj. $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$.

2.3.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}^{a}$. Dla $max\subset\sum^{a}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{np}$, w którym $U:=\mathbb{ZM}$ i d określona jest tym wzorem co w

2.2.

2.4.Rozszerzenia definicyjne. Dołączając do zbioru $\mathbf{Ax}^{a}$ (odp. $\mathbf{Ax}^{a,V}$) definicję (def_1o) lub ($def_1\equiv$) otrzymamy odpowiednio definicyjne rozszerzenia, dla których silnie adekwatne są klasy modeli $K^{\emptyset}$, K i K^{np}. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku systemy z symbolem ≡ są systemami z równością.

§3. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,V})$ oraz $TAUT(\sum^{a,ex,V})$

3.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex})$ będzie zbiorem złożonym z formuł: (C1.2.1), (C1.2.2) oraz

(C1.3.1) $(exS\wedge SaP)\Rightarrow exP$

(C1.3.2) $\neg exS\Rightarrow SaP$

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a,ex,V}:=\mathbf{Ax}^{a,ex}\cup\{(C1.2.3)\}$, zaś $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$ jest rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a,ex,V}$ o poniższą formułę należącą do $TAUT(\sum)$:

(C1.3.3) exV

3.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a,ex,V}$. Dla $max\subset\sum^{a,ex,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=\{\underline{M}\in T^{V} : ex\underline{M}\in max\}$ (może być to zbiór pusty) oraz dla każdego $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U : Ma\underline{S}\in max\}$. Łatwo pokazać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$: $ex\underline{S}\in max$ wtw $ex\underline{S}\in SAT(\mu,\sum^{ex,V})$ oraz $Sa\underline{P}\in max$ wtw $Sa\underline{P}\in SAT(\mu,\sum^{a,ex,V})$.

3.3.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$. Dla $max\subset\sum^{a,ex,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)$, w którym $U:=T^{V}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U : ex\underline{M}\wedge Sa\underline{P}\in max\}$.

Możemy również przyjąć model z 3.2, gdyż ze względu na (C1.3.3) jego uniwersum jest niepuste.

3.4.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a,ex}$. Dla $max\subset\sum^{a,ex}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\mathbb{ZM}$ i d określamy jak w 3.3.

3.5.Rozszerzenia definicyjne. Dołączając do zbioru $\mathbf{Ax}^{a,ex}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a,ex,V}$, $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$) definicje (def_1o), ($def_1\equiv$) lub ($def_1a^{\bullet}$) otrzymamy rozszerzenia, dla których silnie adekwatne są klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. $K^{\emptyset}$; K). Systemy z symbolem ≡ są systemami z równością.

§4. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet}})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},V})$ oraz $TAUT(\sum^{a^{\bullet},V})$

4.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet}})$ będzie zbiorem złożonym z poniższych formuł:

(C1.4.1) $Sa^{\bullet}P\Rightarrow Sa^{\bullet}S$

(C1.4.2) $Sa^{\bullet}P\Rightarrow Pa^{\bullet}P$

(C1.4.3) $(Sa^{\bullet}M\wedge Ma^{\bullet}P)\Rightarrow Sa^{\bullet}P$

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{\bullet},V}$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$ o poniższą formułę należącą do $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},V})$:

(C1.4.4) $Sa^{\bullet}S\Rightarrow Sa^{\bullet}V$

zaś $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},V}$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{\bullet},V}$ o poniższą formułę należącą do $TAUT(\sum^{a^{\bullet},V})$:

(C1.4.5) $Va^{\bullet}V$

4.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{\bullet},V}$. Dla $max\subset\sum^{a^{\bullet},V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=\{\underline{M}\in T^{V} : \underline{M}a^{\bullet}\underline{M}\in max\}$ (może być to zbiór pusty), zaś dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U : \underline{M}a^{\bullet}\underline{S}\in max\}$. Łatwo pokazać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$, $\underline{S}a^{\bullet}\underline{P}\in max$ wtw $Sa^{\bullet}P\in SAT(\mu,\sum^{a^{\bullet},V})$, tj. $D(\underline{S})\neq\emptyset$ i $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$.

4.3.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},V}$. Dla max bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=T^{V}$ i dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\underline{M}\in U : \underline{M}a^{\bullet}\underline{S}\in max\}$. Można również przyjąć model określony jak w 4.2., gdyż ze względu na (C1.4.5), jego uniwersum jest niepuste.

4.4.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$. Dla $max\in\sum^{a^{\bullet}}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\mathbb{ZM}$ i d określamy tym wzorem co w 4.3.

4.5.Rozszerzenia definicyjne. Dołączając do $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{\bullet},V}$;

$\mathbf{Ax}^{a^*,V}$) definicje (def_1a), (def_2o), ($def_2\equiv$) lub (def_1ex) otrzymamy odpowiednie rozszerzenia definicyjne, dla których silnie adekwatne są klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. klasa $K^{\emptyset}$;klasa K).

4.6.Równoważność definicyjna. Zauważmy, że systemy wyznaczone przez $\mathbf{Ax}^{a^*}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^*,V}$; $\mathbf{Ax}^{a^*,V}$) oraz $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^*,ex,V}$; $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$) są definicyjnie równoważne. Istotnie, klasa K (odp. $K^{\emptyset}$; K) jest silnie adekwatna względem definicyjnych rozszerzeń powyższych systemów odpowiednio za pomocą definicji (def_1a), (def_2ex) oraz (def_1a*). Zatem zgodnie z uwagą I 5 w komentarzu, rozszerzenia te są równoważne (parami).

§5. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{i})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{i,V})$ oraz $TAUT(\sum^{i,V})$

5.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{i}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{i})$ będzie zbiorem złożonym z poniższych formuł:

(C1.5.1) SiP⇒SiS

(C1.5.2) SiP⇒PiS

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{i,V})$ powstaje z $\mathbf{Ax}^{i}$ przez dodanie formuły:

(C1.5.3) SiS⇒SiV

zaś $\mathbf{Ax}^{i,V}$ powstaje z $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$ po dodaniu formuły z $TAUT(\sum^{i,V})$:

(C1.5.4) ViV

5.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$. Dla $max\subset\sum^{i,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\subset T^{V} : \underline{MiP}\in max\}$ (może być to zbiór pusty) i dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\in U : \underline{S}\in\{\underline{M},\underline{P}\}\}$.

Łatwo pokazać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$: $\underline{SiP}\in max$ wtw $\underline{SiP}\in SAT(\mu,\sum^{i,V})$, tj. $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})\neq\emptyset$.

5.3.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{i,V}$. Dla max bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{\{\underline{M},\underline{P}\} : \underline{M},\underline{P}\in T^{V}\}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\in U : \underline{MiP}\in max \text{ i } \underline{S}\in\{\underline{M},\underline{P}\}\}$.

5.4.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{i}$. Dla $max\in\sum^{i}$ bierzemy model

$\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{\{\underline{M},\underline{P}\} : \underline{M},\underline{P}\in\mathbb{ZM}\}$ i d określamy tym samym wzorem co w 5.3. Mogliśmy wziąć również model $\mu_1=(U_1,d_1)\in K^{\emptyset}$, w którym $U_1:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\subset\mathbb{ZM} : \underline{MiP}\in max\}$ i d_1 jak w 5.2.

5.5.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do zbioru $\mathbf{Ax}^{i}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$; $\mathbf{Ax}^{i,V}$) definicje (def_1e), (def_1e*), (def_1e**) lub (def_1ex) otrzymamy systemy dla których klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. klasa $K^{\emptyset}$; K) są silnie adekwatne.

§6. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,V})$ oraz $TAUT(\sum^{a,i,V})$. System Shepherdsona

6.1.Aksjomaty specyficzne. System J.C.Shepherdsona ([30]), zbudowany - przy przyjętej przez nas symbolice - w zbiorze $\sum^{a,i}$, będzie wyznaczony przez zbiór aksjomatów specyficznych $\mathbf{Ax}^{Sh}$ złożony z następujących formuł należących do $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i})$:

(C1.2.1), (C1.2.2), (C1.5.1) oraz

(C1.6.1) (MiS∧MaP)⇒SiP

(C1.6.2) ¬SiS⇒SaP

Zauważmy, że (C1.5.2) wyprowadzimy z odpowiednich podstawień formuł (C1.2.1) i (C1.6.1), oraz z tej ostatniej mamy tezę:

(1) (MiQ∧MaS∧QaP)⇒SiP

J. C. Shepherdson utożsamił ten system z odpowiednią teorią pierwszego rzędu z dwoma dwuargumentowymi predykatami specyficznymi (A oraz I). Dla tej teorii dowiódł twierdzenie o reprezentacji (będą- ce odpowiednikiem twierdzenia Stone'a dla elementarnej teorii algebr Boole'a; użył przy tym podobnej aparatury matematycznej, mianowicie - ultrafiltrów w pewnego typu algebrach). Z twierdzenia o reprezentacji i z twierdzenia Gödla o pełności dla teorii pierwszego rzędu wynika wniosek, który przy przyjętym utożsamieniu odpowiada stwierdzeniu, że zbiór tez równy jest zbiorowi

$\mathbf{Ax}^{a\bullet,V}$) definicje (def_1a), (def_2o), ($def_2\equiv$) lub (def_1ex) otrzymamy odpowiednie rozszerzenia definicyjne, dla których silnie adekwatne są klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. klasa $K^{\emptyset}$;klasa K).

4.6.Równoważność definicyjna. Zauważmy, że systemy wyznaczone przez $\mathbf{Ax}^{a\bullet}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a\bullet,V}$; $\mathbf{Ax}^{a\bullet,V}$) oraz $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a\bullet,ex,V}$; $\mathbf{Ax}^{a,ex,V}$) są definicyjnie równoważne. Istotnie, klasa K (odp. $K^{\emptyset}$; K) jest silnie adekwatna względem definicyjnych rozszerzeń powyższych systemów odpowiednio za pomocą definicji (def_1a), (def_2ex) oraz (def_1a$^{\cdot}$). Zatem zgodnie z uwagą I 5 w komentarzu, rozszerzenia te są równoważne (parami).

§5. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{i})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{i,V})$ oraz $TAUT(\sum^{i,V})$

5.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{i}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{i})$ będzie zbiorem złożonym z poniższych formuł:

(C1.5.1) SiP⇒SiS

(C1.5.2) SiP⇒PiS

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{i,V})$ powstaje z $\mathbf{Ax}^{i}$ przez dodanie formuły:

(C1.5.3) SiS⇒SiV

zaś $\mathbf{Ax}^{i,V}$ powstaje z $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$ po dodaniu formuły z $TAUT(\sum^{i,V})$:

(C1.5.4) ViV

5.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$. Dla $max\subset\sum^{i,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\subset T^{V} : \underline{MiP}\in max\}$ (może być to zbiór pusty) i dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\in U : \underline{S}\in\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\}$.

Łatwo pokazać, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$: $\underline{SiP}\in max$ wtw $\underline{SiP}\in SAT(\mu,\sum^{i,V})$, tj. $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})\neq\emptyset$.

5.3.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{i,V}$. Dla max bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle : \underline{M},\underline{P}\in T^{V}\}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\in U : \underline{MiP}\in max$ i $\underline{S}\in\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\}$.

5.4.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{i}$. Dla $max\in\sum^{i}$ bierzemy model

$\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle : \underline{M},\underline{P}\in\mathbb{ZM}\}$ i d określamy tym samym wzorem co w 5.3. Mogliśmy wziąć również model $\mu_1=(U_1,d_1)\in K^{\emptyset}$, w którym $U_1:=\{\langle\underline{M},\underline{P}\rangle\subset\mathbb{ZM} : \underline{MiP}\in max\}$ i d_1 jak w 5.2.

5.5.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do zbioru $\mathbf{Ax}^{i}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{i,V}$; $\mathbf{Ax}^{i,V}$) definicje (def_1e), (def_1e$^{\cdot}$), (def_1e$^{\cdot\cdot}$) lub (def_1ex) otrzymamy systemy dla których klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. klasa $K^{\emptyset}$; K) są silnie adekwatne.

§6. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,V})$ oraz $TAUT(\sum^{a,i,V})$. System Shepherdsona

6.1.Aksjomaty specyficzne. System J.C.Shepherdsona ([30]), zbudowany - przy przyjętej przez nas symbolice - w zbiorze $\sum^{a,i}$, będzie wyznaczony przez zbiór aksjomatów specyficznych $\mathbf{Ax}^{Sh}$ złożony z następujących formuł należących do $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i})$:

(C1.2.1), (C1.2.2), (C1.5.1) oraz

(C1.6.1) (MiS∧MaP)⇒SiP

(C1.6.2) ¬SiS⇒SaP

Zauważmy, że (C1.5.2) wyprowadzimy z odpowiednich podstawień formuł (C1.2.1) i (C1.6.1), oraz z tej ostatniej mamy tezę:

(1) (MiQ∧MaS∧QaP)⇒SiP

J. C. Shepherdson utożsamił ten system z odpowiednią teorią pierwszego rzędu z dwoma dwuargumentowymi predykatami specyficznymi (A oraz I). Dla tej teorii dowiódł twierdzenie o reprezentacji (będą- ce odpowiednikiem twierdzenia Stone'a dla elementarnej teorii algebr Boole'a; użył przy tym podobnej aparatury matematycznej, mianowicie - ultrafiltrów w pewnego typu algebrach). Z twierdzenia o reprezentacji i z twierdzenia Gödla o pełności dla teorii pierwszego rzędu wynika wniosek, który przy przyjętym utożsamieniu odpowiada stwierdzeniu, że zbiór tez równy jest zbiorowi

$TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i})$.

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{Sh,V}:=\mathbf{Ax}^{Sh}\cup\{(C1.2.3)\}$ i $\mathbf{Ax}^{Sh,V}:=\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{Sh,V}\cup\{(C1.5.4)\}$. Z (C1.2.3) i (C1.6.1) wyprowadzimy jako tezę: (C1.5.3).

6.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{Sh,V}$. Dla $max\subset\sum^{a,i,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in T^{V} : \underline{M}i\underline{Q}\in max\}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in U : \underline{M}a\underline{S}\vee\underline{Q}a\underline{S}\in max\}$. Funkcję d przedłużamy na T^{V} do funkcji D, przyjmując $D(V)=U$.

Niech $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$ i $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Jeżeli $\underline{P}=V$, to $D(\underline{P})=U\supset D(\underline{S})$. Jeżeli zaś $\underline{P}\in\mathbb{ZM}$, to dla dowolnego $\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in D(\underline{S})$ albo z określenia funkcji d albo z aksjomatu (C1.2.3) mamy $\underline{M}a\underline{S}\vee\underline{Q}a\underline{S}\in max$. Zatem na mocy (C1.2.2) mamy $\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in D(\underline{P})$. Odwrotnie, załóżmy, że $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. W przypadku gdy $\underline{S}i\underline{S}\notin max$, na mocy (C1.6.2) mamy $\underline{S}a\underline{P}\in max$. W przypadku zaś gdy $\underline{S}i\underline{S}\in max$, na mocy (C1.2.1) mamy $\langle\underline{S}\rangle\in D(\underline{S})$, więc również $\langle\underline{S}\rangle\in D(\underline{P})$. Zatem albo z określenia funkcji d albo z (C1.2.3) mamy $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

Niech $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$ i $\underline{S}i\underline{P}\in max$. Wtedy na mocy (C1.2.1) $\langle\underline{S},\underline{P}\rangle\in D(\underline{S})\cap D(\underline{P})$, a stąd $\underline{S}i\underline{P}\in SAT(\mu,\sum^{a,i,V})$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})\neq\emptyset$. Rozważmy cztery przypadki: 1° $\underline{S}=V=\underline{P}$, wtedy $U\neq\emptyset$, więc istnieją takie $\underline{M},\underline{Q}$, że $\underline{M}i\underline{Q}\in max$. Zatem z (1) i (C1.2.3) otrzymujemy $ViV\in max$; 2° $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$ i $\underline{P}=V$, wtedy $d(\underline{S})\neq\emptyset$, więc istnieją takie $\underline{M},\underline{Q}$, że $\underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a\underline{S}\vee\underline{Q}a\underline{S})\in max$. Stąd na mocy (C1.6.1), (C1.5.1) i (C1.5.2) mamy $\underline{S}i\underline{S}\in max$. Teraz z tezy (C1.5.3) otrzymujemy $\underline{S}iV\in max$; 3° $\underline{S}=V$ i $\underline{P}\in\mathbb{ZM}$, podobnie jak 2°; 4° $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$, wtedy istnieją $\underline{M},\underline{Q}$ takie, że $\underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a\underline{S}\vee\underline{Q}a\underline{S})\wedge(\underline{M}a\underline{P}\vee\underline{Q}a\underline{P})\in max$. Wykorzystując odpowiednie tautologie klasycznego rachunku zdań, aksjomat (C1.5.1) i tezy (C1.5.2) oraz (1), otrzymujemy $\underline{S}i\underline{P}\in max$. Zatem we wszystkich przypadkach 1°-4° mamy $\underline{S}i\underline{P}\in max$.

6.3.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{Sh,V}$. Dla max bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle : \underline{M},\underline{Q}\in T^{V}\}$ i dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in U : \underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a\underline{S}\vee\underline{Q}a\underline{S})\in max\}$. Reszta dowodu przebiega podobnie jak w 6.2. Możemy również przyjąć model określony jak w 6.2., gdyż ze względu

na (C1.5.4), $U\neq\emptyset$ (jest co najwyżej przeliczalne).

6.4.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{Sh}$. Jak w 6.3., zamieniając zbiór T^{V} na zbiór $\mathbb{ZM}$ (inny model w [22]).

6.5.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do zbioru $\mathbf{Ax}^{Sh}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{Sh,V}$;$\mathbf{Ax}^{Sh,V}$) odpowiednio definicje (def_1o), (def_1e), (def_1e^{*}), (def_1e^{**}), (def_2a^{*}), ($def_1\equiv$) lub (def_2ex) otrzymamy systemy, dla których klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. klasa $K^{\emptyset}$;.klasa K) są silnie adekwatne.

§7. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{*},i})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{*},i,V})$ oraz $TAUT(\sum^{a^{*},i,V})$. System Słupeckiego

7.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a^{*},i}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{*},i})$ będzie zbiorem złożonym z następujących formuł: (C1.4.3) oraz

(C1.7.1) $(MiS\wedge Ma^{*}P)\Rightarrow SiP$

(C1.7.2) $Sa^{*}P\Rightarrow SiP$

(C1.7.3) $SiP\Rightarrow Sa^{*}S$

Oczywiście z (C1.7.2) i (C1.7.3) wyprowadzimy tezy (C1.4.1) i (C1.5.1), z (C1.7.1) i (C1.7.3) wyprowadzimy (C1.5.2), oraz z (C1.5.2), (C1.7.2) i (C1.7.3) wyprowadzimy (C1.4.2). Ponadto z (C1.7.1) wyprowadzimy jako tezę:

(2) $(MiQ\wedge Ma^{*}S\wedge Qa^{*}P)\Rightarrow SiP$

Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{*},i,V}:=\mathbf{Ax}^{a^{*},i}\cup\{(C1.4.4)\}$ i $\mathbf{Ax}^{a^{*},i,V}:=\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{*},i,V}\cup\{(C1.4.5)\}$.

Zauważmy, że z (C1.7.3),(C1.4.4) i (C1.7.2) otrzymamy jako tezę (C1.5.3). Ponadto zauważmy, że systemy wyznaczone odpowiednio przez zbióry $\mathbf{Ax}^{a^{*},i,V}$ oraz $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{*},i,V}\cup\{(C1.5.4)\}$ są równoważne. Istotnie, z (C1.7.2) i (C1.4.5) wyprowadzimy (C1.5.4), zaś z (C1.7.3) i (C1.5.4) wyprowadzimy (C1.4.5).

7.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^{*},i,V}$. Dla $max\subset\sum^{a^{*},i,V}$ bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym U określamy jak w 6.2., zaś dla

$\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in U : \underline{M}a^{\cdot}\underline{S}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{S}\in max\}$.

Niech dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$, $\underline{S}i\underline{P}\in max$. Wtedy na mocy (C1.7.3) oraz (C1.5.2), $\langle\underline{S},\underline{P}\rangle\in D(\underline{S})\cap D(\underline{P})$. Odwrotnie załóżmy, że $D(\underline{S})\cap D(\underline{P})\neq\emptyset$. Rozważmy cztery przypadki: 1° $\underline{S}=V=\underline{P}$, wtedy $U\neq\emptyset$, więc istnieją $\underline{M},\underline{Q}$ takie, że $\underline{M}i\underline{Q}\in max$. Na mocy (C1.7.3) i (C1.5.2), $\underline{M}a^{\cdot}\underline{M}\wedge\underline{Q}a^{\cdot}\underline{Q}\in max$. Stąd dzięki (C1.4.4) mamy $\underline{M}a^{\cdot}V\wedge\underline{Q}a^{\cdot}V\in max$. Dalej korzystając z tezy (2) mamy $ViV\in max$; 2° $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$ i $\underline{P}=V$, wtedy $d(\underline{S})\neq\emptyset$, więc istnieją $\underline{M},\underline{Q}$ takie, że $\underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a^{\cdot}\underline{S}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{S})\in max$. Stąd na mocy (C1.7.1), (C1.5.1) i (C1.5.2) mamy $\underline{S}i\underline{S}\in max$. Z kolei na mocy tezy (C1.5.3), $\underline{S}iV\in max$; 3° $\underline{S}=V$ i $\underline{P}\in\mathbb{ZM}$ - podobnie jak w 2°; 4° $\underline{S},\underline{P}\in\mathbb{ZM}$, wtedy istnieją takie $\underline{M},\underline{Q}$, że $\underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a^{\cdot}\underline{S}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{S})\wedge(\underline{M}a^{\cdot}\underline{P}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{P})\in max$. Wykorzystując odpowiednie tautologie klasycznego rachunku zdań oraz tezy (C1.5.1), (C1.5.2) i (2) otrzymujemy $\underline{S}i\underline{P}\in max$.

Niech dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$, $\underline{S}a^{\cdot}\underline{P}\in max$. Wtedy na mocy (C1.7.2) i (C1.7.3) $\langle\underline{S}\rangle\in D(\underline{S})$, czyli $D(\underline{S})\neq\emptyset$. Ponadto jeżeli $\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in D(\underline{S})$, to albo z określenia funkcji d albo z (C1.7.3), (C1.5.2) i (C1.4.4), otrzymujemy $\underline{M}a^{\cdot}\underline{S}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{S}\in max$. Z kolei na mocy (C1.4.3) lub z faktu, iż $D(V)=U$, mamy $\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in D(\underline{P})$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S})\neq\emptyset$ i $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$, tj. $\underline{S}a^{\cdot}\underline{P}\in SAT(\mu,\sum^{a^{\bullet},V})$. Z $D(\underline{S})\neq\emptyset$ wynika, że $\underline{S}i\underline{S}\in max$. Stąd na mocy (C1.7.3), $\langle\underline{S}\rangle\in D(\underline{S})$, czyli również $\langle\underline{S}\rangle\in D(\underline{P})$. Zatem albo z określenia funkcji d albo z (C1.4.4) dostajemy $\underline{S}a^{\cdot}\underline{P}\in max$.

7.3.Silna adekwatność klasy K dla $Ax^{a^{\bullet},i,V}$. Dla max bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym U określamy jak w 6.3., zaś dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $d(\underline{S}):=\{\langle\underline{M},\underline{Q}\rangle\in U : \underline{M}i\underline{Q}\wedge(\underline{M}a^{\cdot}\underline{S}\vee\underline{Q}a^{\cdot}\underline{S})\in max\}$. Reszta dowodu przebiega podobnie jak w 7.2., z wykorzystaniem (C1.4.5). Możemy również przyjąć model jak w 7.2, gdyż ze względu na tezę (C1.5.4), $U\neq\emptyset$.

7.4.Silna adekwatność klasy K dla $Ax^{a^{\bullet},i}$. Jak w 7.3., zmieniając zbiór T^{V} na $\mathbb{ZM}$ i z oczywistymi uproszczeniami[1].

[1] Uniwersa modeli, które konstruowaliśmy w §1-7, składały się wy-

7.5.Równoważne aksjomatyki. Zauważmy, że system wyznaczony przez $Ax^{a^{\bullet},i}$ równoważny jest systemowi wyznaczonemu przez aksjomaty: (C1.4.3), (C1.7.1)), (C1.7.3) oraz

(C1.7.4) $\quad Sa^{\cdot}P\Rightarrow SiS$

Istotnie, z (C1.7.1) i (C1.7.4) wyprowadzimy (C1.7.2), zaś z (C1.7.2) i (C1.7.3) wyprowadzimy (C1.7.4).

Ponadto, równoważny system otrzymamy z aksjomatyki: (C1.4.3), (C1.7.1), (C1.5.1), (C1.7.2) oraz

(C1.7.5) $\quad SiS\Rightarrow Sa^{\cdot}S$

gdyż z (C1.5.1) i (C1.7.5) wyprowadzimy (C1.7.3). Inny równoważny system to system oparty na aksjomatach: (C1.4.1), (C1.4.3), (C1.5.1), (C1.7.1), (C1.7.5) oraz

(C1.7.6) $\quad Sa^{\cdot}S\Rightarrow SiS$

Istotnie, z (C1.4.1), (C1.7.6) i (C1.7.1) wyprowadzimy (C1.7.2), zaś z (C1.5.1) i (C1.7.5) wyprowadzimy (C1.7.3). Odwrotnie, jak już zauważyliśmy wcześniej, (C1.4.1) i (C1.5.1) są wyprowadzalne z (C1.7.2) i (C1.7.3), zaś (C1.7.5) i (C1.7.6) to podstawienia poprzednich formuł.

7.6.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do zbioru $Ax^{a^{\bullet},i}$ (odp. $Ax_{\emptyset}^{a^{\bullet},i,V}$; $Ax^{a^{\bullet},i,V}$) definicje (def_2o), (def_1e), ($def_1e^{\cdot}$),

łącznie z termów (§1-4) bądź z nieuporządkowanych par termów (§5-7) badanych systemów. W związku z tym dowodząc silnej adekwatności, nie musieliśmy rozszerzać zbioru formuł badanego systemu. Nie będziemy tego czynić również w dalszej części pracy,co pozwoli nam na zastosowanie jednolitej metateorii. Inną metodę konstrukcji modelu zastosował W. A. Boczarow w [1] s. 97-105. W. A. Boczarow nie korzystał przy tym - podobnie jak w niniejszej pracy - z metateorii teorii pierwszego rzędu. Nie będziemy szczegółowo opisywać metody W. A. Boczarowa. Jest ona ściśle dopasowana do badanego w [1] systemu (równoważnego z systemem wyznaczonym przez $Ax^{a^{\bullet},i}$). Można również dodać, iż występują pewne trudności w »naturalnej interpretacji« dołączonychw [1] formuł zdaniowych (choć, oczywiście nie ma to znaczenia dla technicznej wartości stosowanej metody).

(def_1e^{**}), (def_1a), ($def_2\equiv$) lub (def_1ex) otrzymamy odpowiednie systemy, dla których klasy $K^{\emptyset}$ i K (odp. $K^{\emptyset}$; K) są silnie adekwatne

7.7.Równoważność definicyjna. System wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{a^*,i}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{a^*,i,V}$; $\mathbf{Ax}^{a^*,i,V}$) jest definicyjnie równoważny systemowi wyznaczonemu przez $\mathbf{Ax}^{Sh}$ (odp. $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{Sh,V}$; $\mathbf{Ax}^{Sh,V}$). Istotnie, klasa K (odp. $K^{\emptyset}$; K) jest silnie adekwatna względem definicyjnych rozszerzeń powyższych systemów odpowiednio za pomocą definicji (def_1a) oraz (def_2a^*), więc zgodnie z uwagą I 5 w komentarzu, rozszerzenia te są równoważne (parami).

7.8.System Słupeckiego. W systemie Jerzego Słupeckiego, przedstawionym w [31], zadania ogólno-twierdzące są rozumiane w sensie mocnym. System ten zrekonstruujemy w zbiorze $\sum^{a^*,i}$. Będzie on wyznaczony przez zbiór aksjomatów specyficznych $\mathbf{Ax}^{Sł}$ zawarty w $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^*,i})$ i złożony z: (C1.4.3), (C1.5.2), (C1.7.2) oraz

(C1.7.7) $(SiM\wedge Ma^*P)\Rightarrow SiP$

W [20] pokazałem, że z $\mathbf{Ax}^{Sł}$ nie wyprowadzimy formuł (C1.4.1), (C1.4.2), (C1.5.1), (C1.7.3), (C1.7.4) (chociaż wyprowadzimy $Sa^*P\Rightarrow PiP$) oraz (C1.7.5). Zatem zbiór tez wyprowadzalnych z $\mathbf{Ax}^{Sł}$ jest podzbiorem właściwym zbioru $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^*,i})$.

Stałe reprezentujące funktory zdań przeczących otrzymują w systemie J. Słupeckiego definicje odpowiadające formułom: (def_1e) i $So^sP\Leftrightarrow\neg Sa^*P$ (funktor zdania szczegółowego przyjmuje przy tej definicji inną interpretację niż przyjęta w tej pracy, dlatego użyliśmy symbolu o^s). Z $\mathbf{Ax}^{Sł}$ i powyższych definicji "można udowodnić każdą tezę sylogistyki Arystotelsa" ([31], s. 188). Różne rozszerzenia definicyjne zbioru $\mathbf{Ax}^{Sł}$ analizowałem w [20].

Zauważmy, że systemy wyznaczone odpowiednio przez $\mathbf{Ax}^{Sł}\cup\{(C1.7.3)\}$ oraz $\mathbf{Ax}^{a^*,i}$ są równoważne. Istotnie, z (C1.7.7) i (C1.5.2) wyprowadzimy (C1.7.1), zaś z (C1.7.1) i (C1.7.3) wyprowadzimy (C1.5.2) i (C1.7.7). Inną równoważną z $\mathbf{Ax}^{a^*,i}$ aksjomatyką

jest rozszerzenie $\mathbf{Ax}^{Sł}$ o (C1.5.1) i (C1.7.5).

§8. Sylogistyka współczesna

W zależności od tego jak rozumiany jest funktor *każde...jest...*, współczesną sylogistykę (bez negacji przynazwowej) możemy budować bądź w zbiorze $\sum^{a,i,e,o}$ bądź w $\sum^{a^*,i,e,o}$. Może to być zatem definicyjne rozszerzenie systemu Shepherdsona za pomocą (def_1e) i (def_1o) bądź systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{a^*,i}$ za pomocą definicji (def_1e) i (def_2o). Również można przyjąć mocną interpretację funktora *żadne...nie jest....*

Rozdział II

Tradycyjne systemy sylogistyczne.

Do tradycyjnych systemów zaliczymy te, w zastosowaniach których dopuszczalne jest tylko podstawianie nazw niepustych. W badaniach semantycznych tych systemów, ograniczenie to odpowiada zawężeniu dopuszczalnych modeli do klasy K^{np} (tj. tych modeli, w których zbiór pusty nie jest wartością funkcji denotacji). Jak wynika ze stwierdzenia 7 z cz. A (s. 47), w badaniach semantycznych tradycyjnych systemów sylogistycznych, klasę K^{np} można zastąpić w sposób równoważny klasą K^{o} (tj. tych modeli, w których do wartości denotacji należą jedynie zbiory co najmniej dwuelementowe).

Zauważmy, że dla dowolnego μ z K^{np} oraz $\underline{S},\underline{P}$ z T^{V} mamy:

$\underline{S}a\underline{P}\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\underline{S}a^{\cdot}\underline{P}\in SAT(\mu,\sum)$,

$\underline{S}e\underline{P}\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\underline{S}e^{\cdot}\underline{P}\in SAT(\mu,\sum)$ wtw $\underline{S}e^{\cdot\cdot}\underline{P}\in SAT(\mu,\sum)$.

Zatem w modelach należących do K^{np} interpretacje stałych a oraz $a^{\cdot}$ (odp. e, $e^{\cdot}$, $e^{\cdot\cdot}$) są nieodróżnialne i symbole te w logice tradycyjnej dublują się.

W rozdziale tym stosujemy identyczne rozszerzenia definicyjne jak w rozdziale I (z pominięciem definicji $a^{\cdot}$, $e^{\cdot}$, $e^{\cdot\cdot}$).

§1. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{t}(\sum^{a,ex})$ i $TAUT^{t}(\sum^{a,ex,V})$

1.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}_t^{a,ex}\subset TAUT^{t}(\sum^{a,ex})$ będzie zbiorem złożonym z formuł: (C1.2.1), (C1.2.2) oraz

(C2.1.1) exS

Oczywiście formuły (C1.3.1) i (C1.3.2) są wyprowadzalne z $\mathbf{Ax}_t^{a,ex}$.

Ponadto, niech $\mathbf{Ax}_t^{a,ex,V}:=\mathbf{Ax}_t^{a,ex}\cup\{(C1.2.3)\}$.

1.2.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}_t^{a,ex,V}$ i $\mathbf{Ax}_t^{a,ex}$. Dla dowolnego $max\subset\sum^{a,ex,V}$ (odp. $\sum^{a,ex}$) budujemy model μ tak jak w 3.2 (odp. 3.4) rozdz. I. Na mocy (C2.1.1) i (C1.2.1), $\mu\in K^{np}$.

§2. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{t}(\sum^{i})$ i $TAUT^{t}(\sum^{i,V})$

2.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}_t^{i}\subset TAUT^{t}(\sum^{i})$ będzie zbiorem złożonym z formuły (C1.5.2) oraz formuły

(C2.2.1) SiS

zaś $\mathbf{Ax}_t^{i,V}$ będzie rozszerzeniem $\mathbf{Ax}_t^{i}$ o formułę z $TAUT^{t}(\sum^{i,V})$:

(C2.2.2) SiV

2.2.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}_t^{i,V}$ i $\mathbf{Ax}_t^{i}$. Dla $max\subset\sum^{i,V}$ (odp. $\sum^{i}$) budujemy model μ, tak jak w 5.2. (odp. 5.4.) rozdz. I. Na mocy (C2.2.1), $\mu\in K^{np}$.

§3. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{t}(\sum^{a,i})$ i $TAUT^{t}(\sum^{a,i,V})$. System Łukasiewicza

3.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{Ł}:=\{(C1.2.1), (C1.2.2), (C1.6.1), (C2.2.1)\}$ (aksjomaty Jana Łukasiewicza; [12], [13], [14]) oraz $\mathbf{Ax}^{Ł,V}:=\mathbf{Ax}^{Ł}\cup\{(C1.2.3)\}$. Z (C1.2.3) i (C1.6.1) wyprowadzimy (C1.5.3), zaś z (C1.5.3) i (C2.2.1) wyprowadzimy (C2.2.2) i (C1.5.4).

3.2.Silna adekwotność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}^{Ł,V}$ i $\mathbf{Ax}^{Ł}$. Dla $max\subset\sum^{a,i,V}$ (odp. $\sum^{a,i}$) budujemy model μ, tak jak w 6.2. (odp 6.4.) rozdz. I. Na mocy (C2.2.1) i (C1.2.1), $\mu\in K^{np}$.

3.3.System Łukasiewicza. Oryginalny system Jana Łukasiewicza ([12]), [13], [14]) jest odrywaniowo-podstawieniowy, wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{Ł}\cup\{(def_1e), (def_1o)\}$. Zgodnie z uwagą III w komentarzu, klasa K^{np} jest adekwatna względem tego systemu. Zatem otrzymujemy znany wynik, iż zbiór jego tez równy jest $TAUT^{t}(\sum^{a,i,e,o})$.

Rozdział III

Bezkwantyfikatorowe fragmenty ontologii Leśniewskiego

W ontologii Leśniewskiego będącej systemem kwantyfikatorowego rachunku nazw z jedną specyficzną stałą pierwotną ε, i opartej na aksjomacie specyficznym:

(o) $S\varepsilon P \Leftrightarrow (\exists M\ M\varepsilon S \wedge \forall M\forall Q((M\varepsilon S\wedge Q\varepsilon S)\Rightarrow M\varepsilon Q) \wedge \forall M(M\varepsilon S\Rightarrow M\varepsilon P))$

można zdefiniować wszystkie pozostałe stałe z $\mathbb{FZ}$. Przykładowo

$exS \Leftrightarrow \exists M\ M\varepsilon S$

$ex!S \Leftrightarrow S\varepsilon S$

$solS \Leftrightarrow \forall M\forall Q((M\varepsilon S\wedge Q\varepsilon S)\Rightarrow M\varepsilon Q)$

$SaP \Leftrightarrow \forall M(M\varepsilon S\Rightarrow M\varepsilon P)$

$SiP \Leftrightarrow \exists M(M\varepsilon S\wedge M\varepsilon P)$

Również poniższe bezkwantyfikatorowe formuły należące do $TAUT^{\varnothing}(\sum)$:

$(def_o V)$ $\quad M\varepsilon V \Leftrightarrow M\varepsilon M$

$(def_o ')$ $\quad M\varepsilon S' \Leftrightarrow (M\varepsilon M\wedge\neg M\varepsilon S)$

$(def_o +)$ $\quad M\varepsilon(S+P) \Leftrightarrow (M\varepsilon S\vee M\varepsilon P)$

$(def_o \cdot)$ $\quad M\varepsilon(Q\cdot P) \Leftrightarrow (M\varepsilon S\wedge M\varepsilon P)$

pozwalają wyeliminować - dzięki aksjomatowi (o) - stałe V, ', + oraz · we wszystkich kontekstach. Bez użycia kwantyfikatorów nie możemy jednak zdefiniować wszystkich pozostałych stałych z $\mathbb{FZ}$ za pomocą ε, jak również formuły $(def_o V)$-$(def_o \cdot)$ nie pozwalają na wyeliminowanie we wszystkich kontekstach symboli z $\mathbb{SN}$ (np. nie wyeliminujemy ich z $V\varepsilon P$, $S'\varepsilon P$ itp.).

W ontologii Leśniewskiego nie korzysta się z założenia o istnieniu jakichś przedmiotów, zatem formuła exV (ani tym bardziej

formuła $exV\wedge\neg ex!V$) nie jest tezą tego systemu. Każda bezkwantyfikatorowa teza ontologii Leśniewskiego (w przedstawionej tu postaci) wyprowadzalna z (o), $(def_o V)$-$(def_o \cdot)$ i odpowiednich definicji symboli z $\mathbb{FZ}$ należy do $TAUT^{\varnothing}(\sum)$, oraz odwrotnie.

Powyższe stwierdzenia wynika z twierdzenia prof. Bogusława Iwanusia z [6] (twierdzenie 3.II.). Dokładniej: traktując ontologię Leśniewskiego jako teorię elementarną EO (bez identyczności) opartą na aksjomacie (o) i zbiorze aksjomatów $\{\exists P\forall S(S\varepsilon P\Leftrightarrow(S\varepsilon S\wedge\psi)) : \psi$ jest formułą, w której P nie występuje jako zmienna wolna$\}$ (oraz ewentualnych definicjach stałych z $\mathbb{SN}\cup\mathbb{FZ}$) twierdzenie prof. B. Iwanusia głosi:

> φ jest tezą teorii EO wtw φ jest prawdziwe w dowolnej strukturze dla języka teorii EO, w której uniwersum jest zbiorem potęgowym jakiegoś zbiór U (możliwe, iż pustego), stałej V odpowiada w tej strukturze zbiór U, zaś symbolom z $\mathbb{FN}$ (odp. $\mathbb{FZ}$) odpowiadają operacje (odp. relacje) teoriomnogościowe użyte przy definiowaniu zbioru formuł spełnionych w danym momodelu.

Korzystając z własności formuł bezkwantyfikatorowych, wnioskujemy z powyższego, iż: dana formuła bezkwantyfikatorowa jest tezą EO wtw należy do $TAUT^{\varnothing}(\sum)$.

Można również łatwo bezpośrednio wyprowadzić z (o) i odpowiednich definicji, wszystkie występujące dalej aksjomaty należące do $TAUT^{\varnothing}(\sum)$.

Zgodnie z tytułem części C w niniejszym rozdziale będziemy badać jedynie takie systemy, których zbiór formuł zdaniowych wyznaczony jest przez jakiś zbiór symboli zawarty w zbiorze $\mathbb{FZ}\cup\{V\}$. W każdym z rozpatrywanych systemów będzie występować jako stała pierwotna przynajmniej jeden z symboli: ε, ex!, sol, =. Przy czym, jeżeli ε nie będzie stałą pierwotną, to - poza dwoma przypadkami -

będzie definiowalna.

Na mocy stwierdzenia 4 z cz. A (s. 42), jeżeli $s\subset\mathbb{FZ}$ (wtedy $V\notin s$), to $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{S})=TAUT(\Sigma^{S})$. Równości te, w badanych dalej przypadkach, wynikać będą również z udowadnianych silnych adekwatności klas $K^{\emptyset}$ i K względem odpowiednich systemów bez symbolu V.

§1. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon})$ i $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{=})$

Ze stwierdzenia 8 w cz. A (s. 50) wynika, że

$TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon})=TAUT(\Sigma^{\varepsilon})=TAUT^{t}(\Sigma^{\varepsilon})$ i $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{=})=TAUT(\Sigma^{=})=TAUT^{t}(\Sigma^{=})$. Poniżej udowodnimy, że $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon,V})=TAUT(\Sigma^{\varepsilon,V})$ (patrz I 2 w komentarzu do cz. C i D).

1.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}\subset TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon})$ składa się z:

(C3.1.1) $S\varepsilon P\Rightarrow S\varepsilon S$

(C3.1.2) $(S\varepsilon P\wedge P\varepsilon P)\Rightarrow P\varepsilon S$

(C3.1.3) $(S\varepsilon M\wedge M\varepsilon P)\Rightarrow S\varepsilon P$

M. Takano, utożsamiając system wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$ z odpowiednią teorią elementarną, udowodnił dla tej teorii twierdzenie o reprezentacji ([33]). Z tego twierdzenia i z twierdzenia Gödla o pełności wynika wniosek, który, przy przyjętym utożsamieniu, stwierdza równości zbioru tez tego systemu ze zbiorm $TAUT(\Sigma^{\varepsilon})$.

Niech $\mathbf{Ax}^{\varepsilon,V}\subset TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{\varepsilon,V})$ będzie rozszerzeniem $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$ o formuły:

(C3.1.4) $S\varepsilon S\Rightarrow S\varepsilon V$

(C3.1.5) $V\varepsilon P\Rightarrow P\varepsilon P$

Oczywiście $S\varepsilon V\Leftrightarrow S\varepsilon S$ jest tezą, lecz nie jest to definicja stałej V w tym systemie.

1.2.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{\varepsilon,V}$. Dla dowolnego $max\subset\Sigma^{\varepsilon,V}$ rozważmy dwa przypadki:

1° gdy $V\varepsilon V\in max$: bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{V\}$ oraz dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$ $d(\underline{S})=\emptyset$ wtw $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\notin max$; $d(\underline{S})=U$ wtw $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$.

Niech dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$, $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in max$. Wtedy z (C3.1.1) mamy $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$. Ponadto otrzymujemy $\underline{S}\varepsilon V\in max$, $V\varepsilon\underline{S}\in max$ i $V\varepsilon\underline{P}\in max$, więc również $\underline{P}\varepsilon\underline{P}\in max$. Zatem $D(\underline{S})=U=D(\underline{P})$. Odwrotnie, gdy $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in SAT(\mu,\Sigma^{\varepsilon,V})$, to $D(\underline{S})=U=D(\underline{P})$. Zatem $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\wedge\underline{P}\varepsilon\underline{P}\in max$. Stąd i z założenia, oraz z (C3.1.4), (C3.1.2), (C3.1.3) otrzymujemy $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in max$.

2° gdy $V\varepsilon V\notin max$: wtedy bierzemy model $\mu=(U,d)\in K^{np}$, w którym U i d określamy w następujący sposób:

W zbiorze $T^{V}\times T^{V}$ określamy relację: $\underline{S}\sim\underline{P}$ wtw $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\wedge\underline{P}\varepsilon\underline{S}\in max$ lub $\underline{S}=\underline{P}$. Z aksjomatów wynika, że jest to relacja równoważności, zachowująca należenie formuł atomowych do max. Niech $|\underline{S}|$ będzie (niepustą) klasą abstrakcji termu $\underline{S}$ względem relacji $\sim$, zaś $|T^{V}|:=\{|\underline{S}| : \underline{S}\in T^{V}\}$. Przyjmijmy $U:=|T^{V}|\cup\{\{\emptyset\},\emptyset\}$. Ponadto, dla $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$

$$d(\underline{S}):=\begin{cases}\{|\underline{S}|\} & \text{, gdy } \underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max\\ \{|\underline{M}| : \underline{M}\varepsilon\underline{S}\in max\}\cup\{\{\emptyset\},\emptyset\} & \text{, gdy } \underline{S}\varepsilon\underline{S}\notin max\end{cases}$$

Niech dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{V}$, $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in max$. Wtedy $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$. Zatem $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$ oraz $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}$. Ponadto jeżeli $\underline{P}\varepsilon\underline{P}\in max$, to na mocy (C3.1.2) również $\underline{P}\varepsilon\underline{S}\in max$, czyli $|\underline{S}|=|\underline{P}|$. W przypadku zaś gdy $\underline{P}\varepsilon\underline{P}\notin max$, oczywiste jest, iż $|\underline{S}|\in D(\underline{P})$. Odwrotnie, gdy $D(\underline{S})=\{u\}\subset D(\underline{P})$ dla pewnego $u\in U$, to $\underline{S}\in\mathbb{ZM}$, $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$ i $u=|\underline{S}|$. Zatem $|\underline{S}|\in D(\underline{P})$, czyli albo z określenia funkcji d albo z (C1.3.4) mamy $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in max$.

1.3.Silna adekwatność klasy K^{np} dla $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$. Dla $max\subset\Sigma^{\varepsilon}$ budujemy model $\mu\in K^{np}$ jak w przypadku 2° w 1.2. zmieniając T^{V} na $\mathbb{ZM}$.

1.4.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do zbioru $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$ (odp.$\mathbf{Ax}^{\varepsilon,V}$) definicje ($def_1\bar{\varepsilon}$), ($def_1=$) lub ($def_4$ ex!), otrzymamy odpowiednie systemy, dla których K^{np} (odp. K) jest silnie adekwatna.

1.5.Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{=})$. Podamy aksjomatykę teorii $TAUT^{\emptyset}(\Sigma^{=})$, aby porównać ją z aksjomatyką teorii symboli $\equiv$, a, a', i oraz ε:

(C3.1.6) $S=P\Rightarrow S=S$

(C3.1.7) $S=P \Rightarrow P=S$

(C3.1.8) $(S=M \wedge M=P) \Rightarrow S=P$

Podobną metodą jak w 1.3. można udowodnić adekwatność.

§2. Aksjomatyzacja $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,\varepsilon})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex!,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex!})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,sol,V})$ i $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,sol})$

W paragrafie tym (podobnie jak w §1) nie możemy w ogóle sformułować założenia o niepustości uniwersum (tzn. w badanych systemach nie występuje żadna z formuł: exV, ViV, Va V, ex!V $\vee$ $\neg$solV). Jednak wykażemy, że jeżeli X jest jednym ze zbiorów $\sum^{a,\varepsilon,V}$, $\sum^{a,ex!,V}$ lub $\sum^{a,sol,V}$, to $TAUT^{\emptyset}(X)=TAUT(X)$ (patrz I 2 w komentarzu). Oczywiście, dla zbiorów $\sum^{a,\varepsilon}$, $\sum^{a,ex!}$ i $\sum^{a,sol}$ jest to ogólna prawidłowość.

2.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon} \subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,\varepsilon})$ składa się z:

(C1.2.1), (C1.2.2), (C3.1.1), (C3.1.2) oraz

(C3.2.1) $S \varepsilon P \Rightarrow SaP$

(C3.2.2) $(S \varepsilon S \wedge SaP) \Rightarrow S \varepsilon P$

(C3.2.3) $(S \varepsilon P \wedge PaS) \Rightarrow P \varepsilon P$

(C3.2.4) $(\neg S \varepsilon S \wedge SaM \wedge M \varepsilon M) \Rightarrow SaP$

Niech $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon,V} := \mathbf{Ax}^{a,\varepsilon} \cup \{(C1.2.3)\}$. Widzimy, że (C3.1.3) wyprowadzimy z (C1.2.2), (C3.1.1), (C3.2.1) i (C3.2.2). Ponadto, (C3.1.4) wyprowadzimy z (C1.2.3) i (C3.2.2), zaś (C3.1.5) z (C1.2.3) i (C3.2.3). Zauważmy, że system oparty na $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon}$ równoważny jest systemowi opartemu na aksjomatach:

(C1.2.1), (C1.2.2), (C3.2.4) oraz

(1) $(S \varepsilon S \wedge SaP) \Leftrightarrow S \varepsilon P$

(2) $S \varepsilon P \Rightarrow (PaS \Leftrightarrow P \varepsilon P)$

Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex!} \subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex!})$ będzie złożony z formuł:

(C1.2.1), (C1.2.2) oraz

(C3.2.5) $(ex!S \wedge SaP) \Rightarrow (PaS \Leftrightarrow ex!P)$

(C3.2.6) $(\neg ex!S \wedge SaM \wedge ex!M) \Rightarrow SaP$

Ponadto niech $\mathbf{Ax}^{a,ex!,V} := \mathbf{Ax}^{a,ex!} \cup \{(C1.2.3)\}$.

Jest oczywiste, że aksjomaty należące do $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon}$ i $(def_4 ex!)$ są wyprowadzalne z $\mathbf{Ax}^{a,ex!}$ i definicji $(def_1 \varepsilon)$, oraz odwrotnie. Zatem systemy wyznaczone odpowiednio przez $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon}$ i $\mathbf{Ax}^{a,ex!}$ (odp. $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon,V}$ i $\mathbf{Ax}^{a,ex!,V}$) są definicyjnie równoważne.

Niech $\mathbf{Ax}^{a,sol} \subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,sol})$ składa się z następujących formuł:

(C1.2.1), (C1.2.2) oraz

(C3.2.7) $(SaP \wedge solP) \Rightarrow solS$

(C3.2.8) $(SaM \wedge solM \wedge \neg MaS) \Rightarrow SaP$

Ponadto, niech $\mathbf{Ax}^{a,sol,V} := \mathbf{Ax}^{a,sol} \cup \{(C1.2.3)\}$. Symbol sol nie jest definiowalny ani za pomocą a oraz ε ani za pomocą a oraz ex!. Ponadto, za pomocą sol oraz a nie zdefiniujemy ani ε ani ex!.

2.2.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a,ex!,V}$. Dla $max \subset \sum^{a,ex!,V}$ rozważmy dwa przypadki:

1° gdy $ex!V \in max$: Zauważmy, że z (C1.2.3) i (C3.2.5) wyprowadzimy

(3) $(ex!V \wedge ex!S) \Rightarrow VaS$

zaś z (3), (C1.2.2), (C1.2.3) i (C3.2.5) otrzymamy tezę:

(4) $(ex!V \wedge ex!S) \Rightarrow (SaP \Leftrightarrow ex!P)$

Ponadto, z (C1.2.3) i (C3.2.6) wyprowadzimy tezę:

(5) $(ex!V \wedge \neg ex!S) \Rightarrow SaP$

Dla max zbudujemy model $\mu=(U,d) \in K$, w którym $U:=\{V\}$ oraz dla $\underline{S} \in \mathbb{M}$: $d(\underline{S})=\emptyset$ wtw $\underline{S} \varepsilon \underline{S} \notin max$; $d(\underline{S})=U$ wtw $\underline{S} \varepsilon \underline{S} \in max$.

Korzystając z tez (3) - (5), łatwo pokazać, że: $\underline{S}aP \in max$ wtw $D(\underline{S}) \subset D(\underline{P})$; $ex!\underline{S} \in max$ wtw Card $D(\underline{S})=1$, tj. $D(\underline{S})=U$.

2° gdy $ex!V \notin max$: Z (C1.2.3) i (C3.2.5) wyprowadzimy tezę:

(6) $(ex!S \wedge \neg ex!V) \Rightarrow \neg VaS$

W zbiorze $T^V \times T^V$ określimy relację ~ wzorem: $\underline{S} \sim \underline{P}$ wtw

$\underline{S}a\underline{P} \wedge \underline{P}a\underline{S} \in max$. Jest to relacja równoważności, zachowująca należenie formuł atomowych do *max*. Niech $|\underline{S}|$ będzie klasą abstrakcji termu $\underline{S}$ względem relacji ~, zaś $|T^V|$ zbiorem klas abstrakcji (ilorazowym). Dla zbioru *max* bierzemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=|T^V| \cup \{\emptyset\}$ (U ma co najmniej dwa elementy oraz jest co najwyżej przeliczalny), zaś dla $\underline{S}\in ZM$ przyjmijmy

$$d(\underline{S}):=\begin{cases} \{|\underline{S}|\}, & \text{gdy } ex!\underline{S}\in max \\ \emptyset, & \text{gdy dla pewnego } \underline{M}\text{: } ex!\underline{M}\wedge \underline{S}a\underline{M}\wedge\neg ex!\underline{S}\in max \\ \{|\underline{M}|\} : \underline{M}a\underline{S}\in max\}\cup\{\emptyset\}, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Funkcję d przedłużamy do D warunkiem: $D(V)=U$, na ZM $d=D$.

Załóżmy, że dla $\underline{S}\in T^V$, $ex!\underline{S}\in max$. Zatem $\underline{S}\neq V$ i $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S})=\{u\}$ dla pewnego $u\in U$. Z określeń zbioru U i funkcji D wynika, że $\underline{S}\in ZM$, zaś z (C1.2.1) i określenia funkcji d otrzymujemy, iż $ex!\underline{S}\in max$.

Załóżmy teraz, iż dla $\underline{S},\underline{P}\in T^V$, $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Gdy $\underline{P}=V$, to $D(\underline{S})\subset U=D(\underline{P})$; zaś dla $\underline{P}\in ZM$ rozpatrzymy trzy możliwości:

a) $ex!\underline{P}\in max$: Na mocy obu założeń i tezy (6), $\underline{S}\in ZM$. Teraz jeżeli $ex!\underline{S}\notin max$, to $\neg ex!\underline{S}\wedge \underline{S}a\underline{P}\wedge ex!\underline{P}\in max$, więc z określenia funkcji d, $d(\underline{S})=\emptyset$. Jeżeli zaś $ex!\underline{S}\in max$, to z (C3.2.5) i założenia mamy $|\underline{S}|=|\underline{P}|$, tj. $d(\underline{S})=d(\underline{P})$. Zatem $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$.

b) $ex!\underline{P}\notin max$ i dla pewnego $\underline{M}$ mamy $ex!\underline{M}\wedge \underline{P}a\underline{M}\in max$: Wtedy na mocy (C3.2.6), $\underline{P}a\underline{S}\in max$. Stąd i tezy (6), $\underline{S}\in ZM$, zaś z określenia funkcji d mamy $d(\underline{S})=\emptyset$, gdyż $\neg ex\underline{S}\wedge \underline{S}a\underline{M} \in max$ na mocy (C3.2.5) i (C1.2.2). Zatem $d(\underline{S})=\emptyset=d(\underline{P})$.

c) W pozostałym przypadku $d(\underline{P})=\{|\underline{M}| : \underline{M}a\underline{P}\in max\}\cup\{\emptyset\}$, więc inkluzja $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$ wynika z założeń, z (C1.2.2), (C1.2.3) oraz z określenia relacji ~.

Odwrotnie, załóżmy że $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Rozważmy dwa przypadki:

a) $D(\underline{S})=\emptyset$: Wtedy $\underline{S}\in ZM$, więc z określenia funkcji d dla pewnego $\underline{M}$ mamy $\neg ex!\underline{S}\wedge \underline{S}a\underline{M}\wedge ex!\underline{M}\in max$. Stąd na mocy (C1.2.6) mamy $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

b) $D(\underline{S})\neq\emptyset$: Wtedy na mocy (C1.2.1) i określenia funkcji D, $|\underline{S}|\in D(\underline{S})$. Stąd również $|\underline{S}|\in D(\underline{P})$. Zatem, albo z określenia funkcji d albo z (C1.2.3), $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

2.3.Silna adekwatność klasy K dla $Ax^{a,ex!}$. Dla $max\subset\sum^{a,ex!}$ budujemy model $\mu\in K$ tak jak w 2.2 przypadek 2°, zmieniając T^V na ZM.

2.4.Silna adekwatność klasy K dla $Ax^{a,sol,V}$. Dla $max\subset\sum^{a,sol,V}$ rozważmy dwa przypadki:

1° gdy $solV\in max$: budujemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=\{V\}$ oraz dla $\underline{S}\in ZM$: $d(\underline{S})=\emptyset$ wtw $Va\underline{S}\notin max$; $d(\underline{S})=U$ wtw $Va\underline{S}\in max$.

Zauważmy, że na mocy (C1.2.3), (C3.2.7) i założenia, dla każdego $\underline{S}\in T^V$ zachodzi $sol\underline{S}\in max$, oraz jest to formuła spełniona w μ. Załóżmy zatem, że dla $\underline{S},\underline{P}\in T^V$, $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Jeżeli $D(\underline{S})\neq\emptyset$, to $Va\underline{S}\in max$, więc na mocy (C1.2.2) również $Va\underline{P}\in max$, czyli $D(\underline{S})=U=D(\underline{P})$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Wtedy, gdy $D(\underline{S})=\emptyset$, to na mocy (C1.2.3), (C3.2.8) i założenia, $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Gdy zaś $D(\underline{S})\neq\emptyset$, to $Va\underline{P}\in max$, więc z (C1.2.2) i (C1.2.3), $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

2° gdy $solV\notin max$: Wtedy dla *max* określamy $|\underline{S}|$ i $|T^V|$ jak w 2.2. przypadek 2°. Budujemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=|T^V|\cup\{\emptyset\}$, zaś funkcję d określamy na ZM warunkiem

$$d(\underline{S}):=\begin{cases} \{|\underline{M}| : \underline{M}a\underline{S}\in max\}\cup\{\emptyset\}, & \text{gdy } sol\underline{S}\notin max \\ \emptyset, & \text{gdy dla pewnego } \underline{M}\text{: } sol\underline{M}\wedge \underline{S}a\underline{M}\wedge\neg \underline{M}a\underline{S}\in max \\ \{|\underline{S}|\}, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Na mocy (C1.2.1) i (C3.2.7): $sol\underline{S}\in max$ wtw $sol\underline{S}\in SAT(\mu,\sum)$.

Dla $\underline{S},\underline{P}\in T^V$ załóżmy, że $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Jeżeli $D(\underline{S})=\emptyset$, to $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Jeżeli zaś $D(\underline{S})\neq\emptyset$, to albo $sol\underline{S}\notin max$ albo $sol\underline{S}\in max$ i nie istnieje takie $\underline{M}$, że $\underline{S}a\underline{M}\wedge sol\underline{M}\wedge\neg \underline{M}a\underline{S}\in max$. Stąd na mocy (C3.2.7) i założenia, albo $sol\underline{P}\notin max$ albo $sol\underline{P}\in max$ i $|\underline{S}|=|\underline{P}|$. Z określenia funkcji D i (C1.2.3) mamy zatem $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Wtedy, gdy $D(\underline{S})=\emptyset$, to $\underline{S}\in ZM$, i z określenia d oraz (C3.2.8) wynika, że $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Jeżeli zaś $D(\underline{S})\neq\emptyset$, to $|\underline{S}|\in D(\underline{S})$, więc również $|\underline{S}|\in D(\underline{P})$.

Zatem z określenia funkcji d lub z (C1.2.3) mamy $\underline{SaP}\in max$.

2.5.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{a,sol}$. Dla $max\subset\sum^{a,sol}$ budujemy model μ tak jak w 2.4. przypadek 2°, zmieniając T^{V} na $\mathbb{ZM}$.

2.6.Rozszerzenia definicyjne. Dodając do $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon}$ i $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon,V}$ definicje (def_1o), ($def_1\equiv$), ($def_1\bar{\varepsilon}$), ($def_1=$) lub (def_4ex!) otrzymamy systemy, dla których klasy $K^{\emptyset}$ i K są silnie adekwatne. Podobnie, do zbiorów $\mathbf{Ax}^{a,ex!}$ i $\mathbf{Ax}^{a,ex!,V}$ możemy dołączyć definicje (def_1o), ($def_1\equiv$), ($def_1\varepsilon$), ($def_2\bar{\varepsilon}$) lub ($def_2=$).

§3. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,ex!,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},ex!,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,sol,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},sol,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex!,sol,V})$ oraz bez symbolu V

3.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex,\varepsilon}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,\varepsilon})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a,ex}$ o aksjomaty:

(C3.1.1), (C3.1.2), (C3.2.1), (C3.2.2) oraz

(C3.3.1) $(exS\wedge SaP\wedge P\varepsilon P)\Rightarrow S\varepsilon S$

(C3.3.2) $S\varepsilon S\Rightarrow exS$

Zauważmy, że z (C1.3.2), (C3.2.1), (C3.3.1), (C3.3.2) i (C1.3.1) wyprowadzimy (C3.2.3), zaś (C3.2.4) wyprowadzimy z (C3.3.1) i (C1.3.2). Zatem system wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{a,ex,\varepsilon}$ jest rozszerzeniem systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{a,\varepsilon}$ (ten jest z kolei rozszerzeniem konserwatywnym - wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$). Z dalszej części będzie wynikać, że rozszerzenie to jest konserwatywne.

Niech $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},\varepsilon}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},\varepsilon})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$ o aksjomaty (C3.1.1), (C3.1.2) oraz:

(C3.3.3) $S\varepsilon P\Rightarrow Sa^{\bullet}P$

(C3.3.4) $(S\varepsilon S\wedge Sa^{\bullet}P)\Rightarrow S\varepsilon P$

(C3.3.5) $(Sa^{\bullet}P\wedge P\varepsilon P)\Rightarrow S\varepsilon S$

Oczywiście z (C3.3.3), (C3.3.4), (C3.1.1) i (C1.2.2) wyprowadzimy

(C3.1.3), więc system wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},\varepsilon}$ jest rozszerzeniem (konserwatywnym) systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{\varepsilon}$.

Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex,ex!}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,ex!})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a,ex}$ o aksjomaty:

(C3.3.6) $(exS\wedge SaP\wedge ex!P)\Rightarrow(ex!S\wedge PaS)$

(C3.3.7) $ex!S\Rightarrow exS$

Zauważmy, że z (C1.3.1), (C3.3.6) i (C3.3.7) wyprowadzimy (C3.2.5), zaś (C3.2.6) wyprowadzimy z (C3.3.7) i (C1.3.2). Zatem badany system jest rozszerzeniem (konserwatywnym) systemu wyznaczonego przez zbiór $\mathbf{Ax}^{a,ex!}$.

Niech $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},ex!}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},ex!})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$ o aksjomaty:

(C3.3.8) $(Sa^{\bullet}P\wedge ex!P)\Rightarrow ex!S$

(C3.3.9) $(Sa^{\bullet}P\wedge ex!P)\Rightarrow Pa^{\bullet}S$

(C3.3.10) $ex!S\Rightarrow Sa^{\bullet}S$

Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex,sol}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex,sol})$ będzie rozszerzemiem zbioru $\mathbf{Ax}^{a,ex}$ o aksjomaty : (C3.2.7) oraz

(C3.3.11) $(exS\wedge SaP\wedge solP)\Rightarrow PaS$

(C3.3.12) $\neg exS\Rightarrow solS$

Oczywiście, z (C3.3.11) i (C1.3.2) wyprowadzimy (C3.2.8), więc badany system jest rozszerzeniem (konserwatywnym) systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{a,sol}$.

Niech $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet},sol}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},sol})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a^{\bullet}}$ o aksjomaty:

(C3.3.13) $(Sa^{\bullet}P\wedge solP)\Rightarrow solS$

(C3.3.14) $(Sa^{\bullet}P\wedge solP)\Rightarrow Pa^{\bullet}S$

(C3.3.15) $\neg solS\Rightarrow Sa^{\bullet}S$

Niech $\mathbf{Ax}^{a,ex!,sol}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,ex!,sol})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{a}$ o następujące aksjomaty : (C3.2.7) oraz

(C3.3.16) $ex!S\Rightarrow solS$

(C3.3.17) (ex!S∧SaP∧solP)⇒(ex!P∧PaS)

(C3.3.18) (¬ex!S∧solS)⇒SaP

Zauważmy, że z (C3.3.16), (C3.3.17) i (C3.2.7) wyprowadzimy (C3.2.5), z (C3.3.16), (C3.2.7) i (C3.3.18) wyprowadzimy (C3.2.6), zaś (C3.2.8) wyprowadzimy z (C3.2.7), (C3.3.17) i (C3.3.18). Zatem badany system jest rozszerzeniem (konserwatywnym) systemów wyznaczonych przez zbiory $\mathbf{Ax}^{a,ex!}$ i $\mathbf{Ax}^{a,sol}$.

Zauważmy, że wszystkie systemy wyznaczone przez zdefiniowane wyżej zbiory aksjomatów specyficznych, są definicyjnie równoważne. Dokładniej: równoważne są systemy wyznaczone odpowiednio przez następujące zbiory:

$\mathbf{Ax}^{a,ex,\varepsilon}\cup\{(def_1a^*), (def_4ex!), (def_4sol)\}$

$\mathbf{Ax}^{a^*,\varepsilon}\cup\{(def_1a), (def_4ex!), (def_1ex), (def_5sol)\}$

$\mathbf{Ax}^{a,ex,ex!}\cup\{(def_1a^*), (def_1\varepsilon), (def_1sol)\}$

$\mathbf{Ax}^{a^*,ex!}\cup\{(def_1a), (def_1ex), (def_3\varepsilon), (def_2sol)\}$

$\mathbf{Ax}^{a,ex,sol}\cup\{(def_1a^*), (def_2\varepsilon), (def_1ex!)\}$

$\mathbf{Ax}^{a^*,sol}\cup\{(def_1a), (def_1ex), (def_5\varepsilon), (def_2ex!)\}$

$\mathbf{Ax}^{a,ex!,sol}\cup\{(def_1a^*), (def_3ex), (def_1\varepsilon)\}$

Na koniec, dodajmy do aksjomatyk z symbolem a aksjomat (C1.2.3), zaś do aksjomatyk z symbolem a^* - aksjomat (C1.4.4). Nazwa nowej aksjomatyki powstaje z nazwy aksjomatyki wyjściowej przez dodanie górnego indeksu V i dolnego ø. Dla systemów wyznaczonych przez rozszerzone aksjomatyki również zachodzi definicyjna równoważność, analogiczna do wyżej omówionej.

3.2.Silna adekwatność klasy $K^{\varnothing}$ dla $\mathbf{Ax}_{\varnothing}^{a,ex,ex!,V}$. Dla *max* zawartego w $\sum^{a,ex,ex!,V}$ rozpatrzmy trzy przypadki:

1° gdy exV∉*max*: wtedy dla *max* bierzemy model $\mu_{\varnothing}$ z pustym uniwersum. W tym przypadku z (C1.2.3), (C1.3.1) i (C1.3.2) otrzymujemy, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z T^V, $\underline{S}a\underline{P}\in max$ oraz $ex\underline{S}\notin max$. Zatem z (C3.1.7) również ex!$\underline{S}\notin max$.

2° gdy ex!V∈*max*: wtedy dla *max* budujemy model identyczny jak w 2.2. przypadek 1°. Ponieważ badany system jest rozszerzeniem systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}^{a,ex!,V}$, więc formuły (3), (4) i (5) z 2.2., są jego tezami. Ponadto, z (C3.3.6) i (C1.2.3) wyprowadzimy

(7) (ex!V∧exS)⇒(ex!S∧VaS)

Korzystając z powyższych tez i założenia, łatwo sprawdzić, że dowolna formuła atomowa należy do *max* wtw jest spełniona w podanym wyżej modelu.

3° gdy exV∧¬ex!V∈*max*: Niech $X:=\{\underline{M}\in T^V : ex\underline{M}\in max\}$ (jest to zbiór niepusty). W zbiorze $X\times X$ określamy relację ~ za pomocą wzoru podanego w 2.2. Niech $|\underline{S}|$ będzie (niepustą) klasą abstrakcji termu $\underline{S}$ należącego do X, zaś $|X|$ zbiorem ilorazowym względem relacji ~. Dla *max* budujemy model $\mu=(U,d)\in K$, w którym $U:=|X|\cup X$ (U jest co najmniej dwuelementowe), zaś d określamy na ZM wzorem:

$$d(\underline{S}):=\begin{cases}\{|\underline{S}|\}, \text{ gdy ex!}\underline{S}\in max\\ \{|\underline{M}|\in|X| : \underline{M}a\underline{S}\in max\}\cup\{\underline{M}\in X : \underline{M}a\underline{S}\in max\}, \text{ gdy ex!}\underline{S}\notin max\end{cases}$$

Załóżmy, że dla $\underline{S}\in T^V$, ex$\underline{S}\in max$. Na mocy (C1.2.1) lub niepustości zbioru U mamy $D(\underline{S})\neq\varnothing$. Odwrotnie, gdy $D(\underline{S})\neq\varnothing$, to na mocy (C1.3.1) lub założenia o V, mamy ex$\underline{S}\in max$.

Warunek ex!$\underline{S}\in max$ wtw ex!$\underline{S}\in SAT(\mu,\sum)$, sprawdzamy jak w 2.2.

Załóżmy, że dla $\underline{S},\underline{P}\in T^V$, $\underline{S}a\underline{P}\in max$. Gdy $\underline{P}=V$, to $D(\underline{S})\subset U=D(\underline{P})$. Dla $\underline{P}\in$ZM rozpatrzymy dwa przypadki:

a) ex!$\underline{P}\in max$: wtedy na mocy (C3.3.6), albo ex$\underline{S}\notin max$ albo ex!$\underline{S}\in max$. Zatem $\underline{S}\in$ZM, oraz w pierwszym przypadku $d(\underline{S})=\varnothing$, zaś w drugim na mocy (C3.3.6), $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}=\{|\underline{P}|\}=d(\underline{P})$.

b) ex!$\underline{P}\notin max$: Zawieranie $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$ wynika z (C1.2.2) i (C1.2.3). Odwrotnie załóżmy, że $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Możliwe są wtedy dwa przypadki:

a) $D(\underline{S})=\varnothing$: wtedy ex$\underline{S}\notin max$, więc na mocy (C1.3.2), $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

b) $D(\underline{S})\neq\varnothing$: wtedy $|\underline{S}|\in D(\underline{S})$, więc również $|\underline{S}|\in D(\underline{P})$. Zatem albo z

określenia funkcji d albo z (C1.2.3) mamy $\underline{S}a\underline{P}\in max$.

3.3.Silna adekwatność klas $K^{\emptyset}$ i K dla $Ax^{a,ex,ex!}$. Dla *max* zawartego w $\sum^{a,ex,ex!}$ budujemy model $\mu\in K^{\emptyset}$ jak w 3.2. przypadek 3°, zmieniając jedynie zbiór T^{V} na $\mathbb{ZM}$ (w tym przypadku U może być zbiorem pustym). Reszta dowodu jak w 3.2. z oczywistymi uproszczeniami.

Dla *max* możemy również podać model o niepustym uniwersum. Mianowicie, w 3.2. przypadek 3° zamiast zbioru X bierzemy $\mathbb{ZM}$, zaś funkcję d określamy dla $\underline{S}$ warunkiem: $d(\underline{S}):=\{|\underline{M}| : ex\underline{M}\wedge\underline{M}a\underline{S}\in max\}\cup\{\underline{M} : ex\underline{M}\wedge\underline{M}a\underline{S}\in max\}$, gdy $ex!\underline{S}\in max$; gdy $ex!\underline{S}\in max$, $d(\underline{S}):=\{|\underline{S}|\}$. Reszta dowodu jak w 3.2. z uproszczeniami (inne modele w [22]).

3.4.Rozszerzenia definicyjne. Można stosować odpowiednie definicje wymienione w 3.1. oraz na str. 54–56.

3.5.Rozszerzenia konserwatywne. Z silnej adekwatności klasy $K^{\emptyset}$ (odp. K) względem systemów omawianych w 1.1., 2.1. i 3.1., wynika, że omawiane w punkcie 3.1. rozszerzenia, są konserwatywne.

§4. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,\varepsilon,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,ex!,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,ex!,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,sol,V})$, $TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,sol,V})$ oraz bez symbolu V

4.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $Ax^{Sh,\varepsilon}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,\varepsilon})$ będzie rozszerzeniem zbioru Ax^{Sh} o formuły : (C3.1.1), (C3.2.1) oraz

(C3.4.1) $S\varepsilon S\Rightarrow SiS$

(C3.4.2) $(SaM\wedge M\varepsilon M\wedge SiP)\Rightarrow S\varepsilon P$

Łatwo wykazać, że system wyznaczony przez $Ax^{Sh,\varepsilon}$ jest równoważny systemom wyznaczonym odpowiednio przez zbiory:

- $Ax^{Sh}\cup\{$(C3.1.1), (C3.2.1), (C3.2.2), (C3.4.1), (8), (9)$\}$, gdzie

(8) $(SiS\wedge SaP\wedge P\varepsilon P)\Rightarrow S\varepsilon S$

(9) $(S\varepsilon S\wedge SiP)\Rightarrow SaP$

- $Ax^{Sh}\cup\{$(C3.1.1), (C3.2.1), (C3.4.1), (8), (10)$\}$, gdzie

(10) $(S\varepsilon S\wedge SiP)\Rightarrow S\varepsilon P$

- $Ax^{Sh}\cup\{$(C3.1.1), (C3.2.1), (C3.4.1), (10), (C3.2.3)$\}$.

Niech $Ax^{Sh,ex!}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,ex!})$ będzie rozszerzeniem zbioru Ax^{Sh} o poniższe aksjomaty:

(C3.4.3) $ex!S\Rightarrow SiS$

(C3.4.4) $(ex!S\wedge SiP)\Rightarrow SaP$

(C3.4.5) $(SiS\wedge SaP\wedge ex!P)\Rightarrow ex!S$

Niech $Ax^{Sh,sol}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a,i,sol})$ będzie rozszerzeniem zbioru Ax^{Sh} o następujące formuły : (C3.2.7) oraz

(C3.4.6) $\neg SiS\Rightarrow solS$

(C3.4.7) $(solS\wedge SiP)\Rightarrow SaP$

Niech $Ax^{a^{\bullet},i,\varepsilon}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,\varepsilon})$ będzie rozszerzeniem zbioru $Ax^{a^{\bullet},i}$ o następujące formuły : (C3.1.1), (C3.3.3) oraz

(C3.4.8) $(Sa^{\bullet}M\wedge M\varepsilon M\wedge SiP)\Rightarrow S\varepsilon P$

Niech $Ax^{a^{\bullet},i,ex!}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,ex!})$ będzie rozszerzeniem zbioru $Ax^{a^{\bullet},i}$ o aksjomaty : (C3.3.8), (C3.3.10) oraz

(C3.4.9) $(ex!S\wedge SiP)\Rightarrow Sa^{\bullet}P$

Niech $Ax^{a^{\bullet},i,sol}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{a^{\bullet},i,sol})$ będzie rozszerzeniem zbioru $Ax^{a^{\bullet},i}$ o następujące formuły : (C3.3.13), (C3.4.6) oraz

(C3.4.10) $(solS\wedge SiP)\Rightarrow Sa^{\bullet}P$

Można łatwo wykazać,że wszystkie formuły z $Ax^{a,\varepsilon}$ (odp. $Ax^{a,ex!}$, $Ax^{a,sol}$, $Ax^{a^{\bullet},\varepsilon}$, $Ax^{a^{\bullet},ex!}$, $Ax^{a^{\bullet},sol}$) są wyprowadzalne z $Ax^{Sh,\varepsilon}$ (odp. $Ax^{Sh,ex!}$, $Ax^{Sh,sol}$, $Ax^{a^{\bullet},i,\varepsilon}$, $Ax^{a^{\bullet},i,ex!}$, $Ax^{a^{\bullet},i,sol}$).

Ponadto łatwo pokazać, że wszystkie systemy wyznaczone przez wyżej wymienione zbiory aksjomatów specyficznych są definicyjnie równoważne. Dokładniej: równoważne są systemy wyznaczone przez te zbiory z odpowiednio dodanymi definicjami wymienionymi w 3.1.

Na koniec, dodajmy do aksjomatyk z symbolem a aksjomat (C1.2.3), zaś do aksjomatyk z symbolem $a^{\bullet}$ – aksjomat (C1.4.4). Nazwę no-

wej aksjomatyki otrzymamy z nazwy aksjomatyki wyjściowej, dodając górny indeks V i dolny ø. Dla systemów wyznaczonych przez rozszerzone aksjomatyki również zachodzi definicyjna równoważność, analogiczna do wyżej omówionej.

4.2.Silna adekwatność klasy $K^{ø}$ dla $Ax_{ø}^{Sh,ex!,V}$. Dla $max \subset \sum^{a,i,ex!,V}$ mogą zachodzić trzy przypadki:

1° gdy $ViV \notin max$: wtedy z (C1.6.2), (C1.2.2) i (C1.2.3) otrzymujemy, iż dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z T^V, $\underline{S}a\underline{P} \in max$. Ponadto z (C1.3.2), (C1.5.1) i (C1.6.1) otrzymujemy, że $SiP \notin max$ dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z T^V. Stąd na mocy (C3.4.3), również $ex!\underline{S} \notin max$ dla dowolnego $\underline{S}$ z T^V. Zatem możemy wziąć model $\mu_{ø}$.

2° gdy $ex!V \in max$: wtedy dla *max* budujemy identyczny model jak w 2.2. przypadek 1°.

3° gdy $ViV \wedge \neg ex!V \in max$: Niech $X:=\{\underline{M} \in T^V : \underline{M}i\underline{M} \in max\}$. Niech ~ będzie relacją równoważności określoną na zbiorze $X \times X$ wzorem podanym w 2.2. przypadek 2°. Niech $|\underline{S}|$ będzie klasą abstrakcji termu $\underline{S}$ z X, zaś $|X|$ zbiorem ilorazowym zbioru X. Przyjmijmy $Y:=\{\langle \underline{M},\underline{Q} \rangle : \underline{M},\underline{Q} \in T^V$ oraz $\underline{M}i\underline{Q} \in max\}$. Budujemy model $\mu=(U,d) \in K$, w którym $U:=|X| \cup Y \cup X$ (jest to zbiór co najmniej dwuelementowy) oraz dla $\underline{S}$ z $\mathbb{ZM}$

$$d(\underline{S}) := \begin{cases} \{|\underline{S}|\}, \text{ gdy } ex!\underline{S} \in max \\ \{|\underline{M}| \in |X| : \underline{M}a\underline{S} \in max\} \cup \{\langle \underline{M},\underline{Q} \rangle \in Y : \underline{M}a\underline{S} \vee \underline{Q}a\underline{S} \in max\} \cup \\ \qquad \cup \{\underline{M} \in X : \underline{M}a\underline{S} \in max\}, \text{ gdy jest inaczej} \end{cases}$$

Dodaliśmy trzeci zbiór, gdyż możliwy jest przypadek, że dla pewnego $\underline{S}$ mamy $ex!\underline{S} \notin max$, $|\underline{S}|=\{\underline{S}\}$ oraz dla każdego $\underline{M} \neq \underline{S}$, $\underline{M}a\underline{S} \notin max$.

Dla $\underline{S},\underline{P} \in T^V$ załóżmy, że $\underline{S}i\underline{P} \in max$. Wtedy również $\underline{S}i\underline{S} \wedge \underline{P}i\underline{P} \wedge \underline{P}i\underline{S} \in max$. Rozważmy cztery przypadki:

a) $ex!\underline{S} \wedge ex!\underline{P} \in max$: wtedy na mocy (C3.4.4) $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}=\{|\underline{P}|\}=d(\underline{P})=ø$

b) $ex!\underline{S} \wedge \neg ex!\underline{P} \in max$: wtedy $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}$ oraz na mocy (C3.4.4), $|\underline{S}| \in D(\underline{P})$ (gdy $\underline{P}=V$, to $D(\underline{P})=U$).

c) $\neg ex!\underline{S} \wedge ex!\underline{P} \in max$: podobnie jak w *b*).

d) $\neg ex!\underline{S} \wedge \neg ex!\underline{P} \in max$: wtedy na mocy (C1.2.1), $\langle \underline{S},\underline{P} \rangle \in D(\underline{S}) \cap D(\underline{P})$.

Zatem w przypadkach *a*) - *d*) mamy $D(\underline{S}) \cap D(\underline{P}) \neq ø$. Odwrotnie, niech $D(\underline{S}) \cap D(\underline{P}) \neq ø$. Mogą zachodzić trzy przypadki:

a) $|\underline{M}| \in D(\underline{S}) \cap D(\underline{P})$: wtedy na mocy (C1.6.1) i (C1.2.3) mamy $\underline{S}i\underline{P} \in max$.

b) $\langle \underline{M},\underline{Q} \rangle \in D(\underline{S}) \cap D(\underline{P})$: identycznie jak w 6.2. w rozdz. I dla $Ax^{Sh,V}$ pokazujemy, że $\underline{S}i\underline{P} \in max$.

c) $\underline{M} \in D(\underline{S}) \cap D(\underline{P})$: podobnie jak w *a*), mamy $\underline{S}i\underline{P} \in max$.

Niech dla $\underline{S}$ z T^V, $ex!\underline{S} \in max$. Wtedy $\underline{S} \in \mathbb{ZM}$ oraz $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}$. Odwrotnie, gdy $ex!\underline{S} \notin max$, to w przypadku gdy $\underline{S}i\underline{S} \notin max$, $\underline{S} \in \mathbb{ZM}$ oraz $d(\underline{S})=ø$, zaś w przypadku gdy $\underline{S}i\underline{S} \in max$ mamy $\{|\underline{S}|,\underline{S}\} \subset D(\underline{S})$.

Dla $\underline{S},\underline{P} \in T^V$ załóżmy, że $\underline{S}a\underline{P} \in max$. W przypadku, gdy $\underline{P}=V$, $D(\underline{S}) \subset U=D(\underline{P})$. Dla $\underline{P} \in \mathbb{ZM}$ rozważmy dwa przypadki:

a) $ex!\underline{P} \in max$: wtedy, gdy $\underline{S}i\underline{S} \notin max$, to $d(\underline{S})=ø \subset d(\underline{P})$. Gdy zaś $\underline{S}i\underline{S} \in max$, to na mocy (C3.4.5), również $ex!\underline{S} \in max$. Teraz z Ax^{Sh} i (C3.4.3) mamy $\underline{S}i\underline{P} \wedge \underline{P}i\underline{S} \in max$. Zatem na mocy (C3.4.4), $d(\underline{S})=\{|\underline{S}|\}=\{|\underline{P}|\}=d(\underline{P})$.

b) $ex!\underline{P} \notin max$: wtedy z założenia i (C1.2.1) mamy $D(\underline{S}) \subset D(\underline{P})$.

Odwrotnie, niech $D(\underline{S}) \subset D(\underline{P})$. W przypadku, gdy $D(\underline{S})=ø$, to $\underline{S}i\underline{S} \notin max$, więc na mocy (C1.6.2), $\underline{S}a\underline{P} \in max$. W przypadku, gdy $D(\underline{S}) \neq ø$, to $\underline{S} \in X$, więc na mocy (C1.2.1), $|\underline{S}| \in D(\underline{S})$. Zatem również $|\underline{S}| \in D(\underline{P})$, więc albo z określenia funkcji *d* albo z (C1.2.3) mamy $\underline{S}a\underline{P} \in max$.

4.3.Silna adekwatność klas $K^{ø}$ ii K dla $Ax^{Sh,ex!}$. Dla *max* zawartego w $\sum^{a,i,ex!}$ budujemy model $\mu \in K^{ø}$ jak w 4.2. przypadek 3°, zmieniając jedynie zbiór T^V na $\mathbb{ZM}$ (w tym przypadku *U* może być puste). Reszta dowodu jak w 4.2. z oczywistymi uproszczeniami. Dla *max* możemy również podać model o niepustym uniwersum $U:=|\mathbb{ZM}| \cup \{\langle \underline{M},\underline{Q} \rangle : \underline{M},\underline{Q} \in \mathbb{ZM}\} \cup \mathbb{ZM}$ i *d* określonym jak poprzednio, zachowując zbiory $|X|$, X i Y (inny model w [22]).

4.4.Rozszerzenia definicyjne. Stosujemy odpowiednie definicje wymienione w 2.6. i 3.4., oraz ($def_1 e$), ($def_1 e^{*}$) i ($def_1 e^{**}$).

§5. Bezkwantyfikatorowe fragmenty ontologii Leśniewskiego z aksjomatami istnienia

5.1.Założenie niepustości uniwersum. Niech

$Ax^{a,ex,\varepsilon,V} := Ax^{a,ex,\varepsilon,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.3.1)\}$

$Ax^{a^{\bullet},\varepsilon,V} := Ax^{a^{\bullet},\varepsilon,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.4.5)\}$

$Ax^{a,ex,ex!,V} := Ax^{a,ex,ex!,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.3.1)\}$

$Ax^{a^{\bullet},ex!,V} := Ax^{a^{\bullet},ex!,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.4.5)\}$

$Ax^{a,ex,sol,V} := Ax^{a,ex,sol,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.3.1)\}$

$Ax^{a^{\bullet},sol,V} := Ax^{a^{\bullet},sol,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.4.5)\}$

$Ax^{a,ex!,sol,V} := Ax^{a,ex!,sol,V}_{\emptyset} \cup \{(ex!V \vee \neg solV)\}$

$Ax^{Sh,\varepsilon,V} := Ax^{Sh,\varepsilon,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.5.4)\}$

$Ax^{Sh,ex!,V} := Ax^{Sh,ex!,V}_{\emptyset} \{(C1.5.4)\}$

$Ax^{Sh,sol,V} := Ax^{Sh,sol,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.5.4)\}$

$Ax^{a^{\bullet},i,\varepsilon,V} := Ax^{a^{\bullet},i,\varepsilon,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.5.4)\}$

$Ax^{a^{\bullet},i,ex!,V} := Ax^{a^{\bullet},i,ex!,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.5.4)\}$

$Ax^{a^{\bullet},i,sol,V} := Ax^{a^{\bullet},i,sol,V}_{\emptyset} \cup \{(C1.5.4)\}$

tzn. dodajemy odpowiedni aksjomat jednej z postaci : exV, Va$^{\bullet}$V, ex!V∨¬solV lub ViV. Oczywiście, zachodzą odpowiednie równoważności definicyjne do omawianych w 3.1. oraz 4.1.

Biorąc pod uwagę punkty 3.2. i 4.2., widzimy, że otrzymamy względem klasy K silną adekwatność systemów wyznaczonych przez powyżej zdefiniowane zbiory aksjomatów. Istotnie, odpada przypadek 1°, zaś tylko w tym przypadku konstruowany model miał puste uniwersum. Zatem powyższe zbiory stanowią odpowiednio aksjomatyzację teorii $TAUT(\sum^{a,ex,\varepsilon,V})$, $TAUT(\sum^{a^{\bullet},\varepsilon,V})$, $TAUT(\sum^{a,ex,ex!,V})$, $TAUT(\sum^{a^{\bullet},ex!,V})$, $TAUT(\sum^{a,ex,sol,V})$, $TAUT(\sum^{a^{\bullet},sol,V})$, $TAUT(\sum^{a,ex!,sol,V})$, $TAUT(\sum^{a,i,\varepsilon,V})$, $TAUT(\sum^{a,i,\varepsilon,V})$, $TAUT(\sum^{a,i,ex!,V})$, $TAUT(\sum^{a,i,sol,V})$, $TAUT(\sum^{a^{\bullet},i,\varepsilon,V})$, $TAUT(\sum^{a^{\bullet},i,ex!,V})$ oraz $TAUT(\sum^{a^{\bullet},i,sol,V})$.

5.2.Założenie o uniwersum co najmniej dwuelenentowym. W systemach, w których jako pierwotny występuje symbol ex, i lub a$^{\bullet}$, plus jeden z symboli ex!, sol lub ε (ewentualnie ex! oraz sol), możemy dołączyć jako aksjomat formułę, dzięki której w punktach 3.2. i 4.2. pozostanie jedynie przypadek 3°. W takiej sytuacji otrzymamy system, względem którego silnie adekwatna jest klasa modeli o uniwersum co najmniej dwuelementowym.

Podobna jest sytuacja, gdy żaden z symboli ex, i ani a$^{\bullet}$ nie występuje w systemie, lecz występuje w nim jeden z symboli ε, ex! bądź sol oraz dołączymy jako aksjomat odpowiednią z formuł ¬VεV, ¬ex!V bądź ¬solV. Wtedy odpowiednie wyniki uzyskamy rozpatrując przypadek 2° w punktach 1.2., 2.2. oraz 2.4.

CZĘŚĆ D
SYSTEMY Z FUNKTORAMI NAZWOTWÓRCZYMI

Rozdział I

Boole'owski system sylogistyczny

Boole'owski system sylogistyczny bezkwantyfikatorowego rachunku nazw zbudujemy w zbiorze formuł zdaniowych wyznaczonym przez SN∪FSYL, tj. zbiór {V, ', +, ·, a, o, i, e, e*, e**, a*, ≡, ex}. System ten będzie definicyjnym rozszerzeniem systemu przedstawionego w §1.

§1. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,+,'})$ i $TAUT(\sum^{\equiv,+,'})$

1.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'} \subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,+,'})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}^{\equiv}$ o poniższe formuły:

(D1.1.1) $S\equiv P \Rightarrow S'\equiv P'$

(D1.1.2) $S\equiv P \Rightarrow ((S+M)\equiv(P+M)\wedge(M+S)\equiv(M+P))$

(D1.1.3) $S\equiv S''$

(D1.1.4) $S\equiv(S+(P+P')')$

(D1.1.5) $(S+(M+P)')\equiv((M'+S)'+(P'+S)')'$

Można udowodnić, iż tezami systemu wyznaczonego przez $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ są poniższe formuły[1]:

[1] Patrz punkty 1 1 2 dodatku do części D.

(1) $(S+S)\equiv S$

(2) $(S+P)\equiv(P+S)$

(3) $((S+P)+M)\equiv(S+(P+M))$

(4) $(S+S')\equiv(P+P')$

(5) $S\equiv S' \Rightarrow P\equiv P'$

(6) $S\equiv S' \Rightarrow M\equiv P$

(7) $(S+S')\equiv S' \Rightarrow (S+S')'\equiv S$

(8) $S\equiv P \Leftrightarrow ((S+P)\equiv P\wedge(S+P)\equiv S)$

(9) $S\equiv P \Leftrightarrow S'\equiv P'$

(10) $((P'+S)'+P)\equiv P$

(11) $((P'+S)'+S)\equiv S \Rightarrow (P+S)\equiv S$

(12) $(P+(S+S'))\equiv(S+S')$

(13) $(S'+P)'\equiv(S+S')' \Leftrightarrow (S+P)\equiv P$

(14) $S\equiv(S+S')' \Rightarrow (S+P)\equiv P$

(15) $((S+P)\equiv P\wedge(S+P')\equiv P') \Rightarrow S\equiv(S+S')'$

Ponadto przyjmijmy, że $\mathbf{Ax}^{\equiv,+,'}$ jest rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ o poniższą formułę należącą do $TAUT(\sum^{\equiv,+,'})$

(D1.1.6) $\neg S\equiv S'$

Stosując metodę algebraiczną (tj. używając twierdzenia Stone'a o reprezentacji dla elementarnej teorii algebr Boole'a) pokazano w [21], że zbiór tez pewnego systemu równoważnego z systemem wyznaczonym przez $\mathbf{Ax}^{\equiv,+,'}$, pokrywa się z $TAUT(\sum^{\equiv,+,'})$.

1.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$. Dla dowolnego *max* zawartego w $\sum^{\equiv,+,'}$ określimy pojęcie *max*-filtru. Niepusty podzbiór ∇ zbioru termów $T^{+,'}$ jest *max*-filtrem (dalej krótko - filtrem) wtw spełnia dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ z $T^{+,'}$ poniższe warunki

(i) jeżeli $\underline{S}\in\nabla$ i $(\underline{S}+\underline{P})\equiv\underline{P}\in max$, to $\underline{P}\in\nabla$,

(ii) jeżeli $\underline{S}\in\nabla$ i $\underline{P}\in\nabla$, to $(\underline{S}'+\underline{P}')'\in\nabla$

Zauważmy, że jeżeli $\underline{S}\in\nabla$, to skoro $(\underline{S}+(\underline{S}+\underline{P}))\equiv(\underline{S}+\underline{P})\in max$, więc na mocy (i), również $(\underline{S}+\underline{P})\in\nabla$. Ponadto, jeżeli istnieje taki term

$\underline{S}$, że $\underline{S}\equiv\underline{S}'\in max$, to na mocy (5) i (6), jest tak dla wszystkich termów oraz dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}$ mamy $\underline{S}\equiv\underline{P}\in max$. Zatem w tym przypadku jedynym filtrem jest $T^{+,'}$.

Na mocy tezy (12), dla dowolnego $\underline{S}\in T^{+,'}$, term $(\underline{S}+\underline{S}')$ należy do każdego filtru.

Filtr ∇ nazywamy właściwym wtw $\nabla\neq T^{+,'}$. Zauważmy, że dla dowolnego termu $\underline{S}$, term $(\underline{S}+\underline{S}')'$ nie jest elementem żadnego filtru właściwego. Wynika to z (i), (D1.1.4) i (2). Zatem na mocy (D1.1.3) i (ii), dla dowolnego filtru właściwego ∇ i dowolnego termu $\underline{S}$, nie jest tak, że zarówno $\underline{S}\in\nabla$ i $\underline{S}'\in\nabla$.

Każdy element maksymalny częściowo uporządkowanego przez relację inkluzji zbioru wszystkich filtrów właściwych nazywamy po prostu filtrem maksymalnym. Filtr ∇ jest więc filtrem maksymalnym wtw ∇ jest filtrem właściwym i nie jest zawarty w sposób właściwy w żadnym innym filtrze właściwym różnym od ∇. Każdy filtr właściwy jest podzbiorem jakiegoś filtru maksymalnego. Istotnie, jeżeli ∇_0 jest filtrem właściwym, to z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie elementu maksymalnego w zbiorze wszystkich filtrów właściwych zawierających filtr ∇_0 gdyż każdy łańcuch w tym zbiorze (łańcuchem jest każdy niepusty zbiór filtrów taki, że dla dowolnych jego elementów ∇_1 i ∇_2, lub $\nabla_1\subset\nabla_2$ lub $\nabla_2\subset\nabla_1$) ma kres górny będący sumą mnogościową wszystkich elementów łańcucha.

Zauważmy, że jeżeli $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$, to zbiór $/\underline{S}/:=\{\underline{M}\in T^{+,'}$: $(\underline{S}+\underline{M})\equiv\underline{M}\in max\}$ jest filtrem właściwym, do którego należy $\underline{S}$ ($\underline{S}'$ nie należy do $/\underline{S}/$, na mocy tezy (7)).

Z powyższych dwóch uwag wynika, że jeżeli $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$, to istnieje filtr maksymalny, do którego należy $\underline{S}$.

Pokażemy, że dla dowolnego filtru maksymalnego ∇ i dowolnego termu $\underline{S}\in T^{+,'}$ mamy:

(*) $\quad\underline{S}'\in\nabla$ wtw $\underline{S}\notin\nabla$.

Istotnie, implikację prostą wykazaliśmy już dla filtrów właściwych. Załóżmy zatem, że $\underline{S}\notin\nabla$. Wtedy zbiór $\nabla_1=\{\underline{M}\in T^{+,'}$: dla pewnego $\underline{P}\in\nabla$ mamy $((\underline{P}'+\underline{S})'+\underline{M})\equiv\underline{M}\in max\}$ jest filtrem. Na mocy tezy (10), $\nabla\subset\nabla_1$ oraz $\underline{S}'\in\nabla_1$. ∇_1 jest filtrem właściwym, gdyż $\underline{S}\notin\nabla_1$ (gdyby należał, to dla pewnego $\underline{P}\in\nabla$ mielibyśmy $(\underline{P}'+\underline{S})'+\underline{S}\equiv\underline{S}\in max$, lecz wtedy na mocy (11), również $(\underline{P}+\underline{S})\equiv\underline{S}\in max$, czyli $\underline{S}$ należałoby do ∇). Skoro ∇ jest maksymalny, to $\nabla=\nabla_1$, więc $\underline{S}'\in\nabla$.

Z poprzednio podanej uwagi oraz z (*), (ii) i (D1.1.3) wynika, iż dla dowolnych termów $\underline{S},\underline{P}$ i filtru maksymalnego ∇

(**) $\quad(\underline{S}+\underline{P})\in\nabla$ wtw $\underline{S}\in\nabla$ lub $\underline{P}\in\nabla$

Budujemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym U składa się ze wszystkich filtrów maksymalnych (jeżeli dla jakiegoś $\underline{S}$ mamy $\underline{S}\equiv\underline{S}'\in max$, to $U=\emptyset$), zaś d określamy na $\mathbb{ZM}$ wzorem: $d(\underline{S}):=\{\nabla\in U$: $\underline{S}\in\nabla\}$. Funkcję d przedłużamy na $T^{+,'}$ do funkcji D za pomocą warunków: $D(\underline{S}')=U\setminus D(\underline{S})$, $D(\underline{S}+\underline{P})=D(\underline{S})\cup D(\underline{P})$. Wykorzystując warunki (*) i (**), łatwo pokazać w sposób indukcyjny, że dla każdego $\underline{S}$ z $T^{+,'}$ i każdego $\nabla\in U$:

(x) $\quad\nabla\in D(\underline{S})$ wtw $\underline{S}\in\nabla$

Teraz możemy pokazać, że dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{+,'}$: $\underline{S}\equiv\underline{P}\in max$ wtw $D(\underline{S})=D(\underline{P})$. Na mocy tezy (8) wystarczy udowodnić, że $\underline{S}+\underline{P}\equiv\underline{P}\in max$ wtw $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$. Niech $\underline{S}+\underline{P}\equiv\underline{P}\in max$. Jeżeli $\nabla\in D(\underline{S})$, to na mocy (x), $\underline{S}\in\nabla$, więc z (i) wynika, że $\underline{P}\in\nabla$, czyli $\nabla\in D(\underline{P})$. Odwrotnie, załóżmy, że $\underline{S}+\underline{P}\equiv\underline{P}\notin max$. Wtedy na mocy tezy (13), $(\underline{S}'+\underline{P})'\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$. Zatem zbiór $/(\underline{S}'+\underline{P})'/$ jest filtrem właściwym, do którego należą $\underline{S}$ oraz $\underline{P}'$ (na mocy tezy (10)). Stąd istnieje taki filtr maksymalny ∇_0, że ∇_0 zawiera filtr $/(\underline{S}'+\underline{P})'/$. Zatem $\nabla_0\in D(\underline{S})\setminus D(\underline{P})$, tj. $D(\underline{S})\setminus D(\underline{P})\neq\emptyset$.

1.3.Silna adekwatność klasy K dla $Ax^{\equiv,+,'}$. Na mocy aksjomatów (D1.1.6), (C1.1.2) i (C1.1.3), dla dowolnego termu $\underline{S}$, lub $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$ lub $\underline{S}'\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$. Zatem istnieje taki filtr maksymalny, do którego należy $\underline{S}$ lub $\underline{S}'$. Zatem $U\neq\emptyset$.

§2. Rozszerzenia definicyjne

Na mocy tezy (4) możemy dołączyć do zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ (odp. $\mathbf{Ax}^{\equiv,+,'}$) definicję (def_1V). Ponadto, można dołączyć definicje ($def_{\cdot}$), (def_4a), (def_2i), (def_3o), (def_2e), (def_2e^{*}), (def_2e^{**}), (def_5a^{*}) lub (def_6ex). Otrzymamy wtedy odpowiednie definicyjne rozszerzenie, dla którego silnie adekwatna jest klasa $K^{\emptyset}$ (odp. K).

Zauważmy, że na mocy tezy (5), wyprowadzalnej z $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$, system wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{\equiv,+,'}$ jest równoważny z systemem wyznaczonym przez rozszerzenie zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ o formułę:

(D1.2.1) $\quad \neg(S+S')\equiv(S+S')'$

Z powyższej formuły i (def_1V) otrzymujemy tezę:

$$\neg V\equiv V'$$

Z (D1.1.6), (C1.1.3) i (C1.1.2) wyprowadzimy jako tezę:

$$\neg(S\equiv(S+S')'\wedge S'\equiv(S+S')')$$

Z niej i (def_6ex) wyprowadzimy

$$exS\vee exS'$$

Z (D1.2.1), (4), (def_6ex) i (def_1V) otrzymamy:

$$exV$$

Na koniec z (D1.1.6), (C1.1.2), (C1.1.3) i (def_4a) otrzymamy:

$$\neg(SaS'\wedge S'aS)$$

Dla s=FSYLUSN zbiór TAUT(Σ^{S}) jest na tyle bogaty, że zawiera wszystkie tezy bezkwantyfikatorowego fragmentu elementarnej teorii niezdegenerowanych algebr Boole'a (niekwantyfikowane zmienne indywidualne zamieniamy na zmienne z ZM, predykat identyczności na symbol ≡, zaś symbole funkcyjne dopełnienia, iloczynu i sumy zamienimy odpowiednio na symbole ', • oraz +; [21]).

Rozdział II

Boole'owski bezkwantyfikatorowy fragment ontologii Leśniewskiego

Boole'owski bezkwantyfikatorowy fragment ontologii będzie systemem zbudowanym w zbiorze $\sum$ wyznaczonym przez zbiór S. Jego stałymi pierwotnymi będą: ', +, ≡ oraz ε. Pozostałe stałe z S dędą zdefiniowane za pomocą definicji: (def_1V), ($def_{\cdot}$), (def_4a), (def_5a^{*}), (def_2i), (def_2e), (def_2e^{*}), (def_2e^{**}), (def_3o), (def_6ex), (def_4ex!), (def_7sol), ($def_1\bar{\varepsilon}$), (def_1=) oraz (def i!).Z (def i!), (def •) i (def_4ex!) możemy wyprowadzić

$$Si!P \Leftrightarrow ex!(S\cdot P)$$

Badany w tym rozdziale system będzie definicyjnym rozszerzeniem systemu przedstawionego w §1.

§1. Aksjomatyzacja teorii $TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'})$

1.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,\varepsilon,+,'}\subset TAUT^{\emptyset}(\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'})$ będzie rozszerzeniem zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ o formuły: (C3.1.1) oraz

(D2.1.1) $\quad S\equiv P \Rightarrow ((S\varepsilon M\Rightarrow P\varepsilon M)\wedge(M\varepsilon S\Rightarrow M\varepsilon P))$

(D2.1.2) $\quad S\varepsilon P \Rightarrow (S+P)\equiv P$

(D2.1.3) $\quad S\varepsilon S \Rightarrow \neg S\equiv(S+S')'$

(D2.1.4) $\quad ((S+M)\equiv M\wedge M\varepsilon M\wedge\neg(S'+P')\equiv(S+S'))\Rightarrow S\varepsilon P$

Oprócz tez wyprowadzonych w rozdz. I, z powyższych aksjomatów możemy wyprowadzić następujące tezy[2] :

[2] Patrz punkty 3 i 4 dodatku do części D.

(16) $(S\varepsilon S\wedge\neg(S'+P')'\equiv(S+S')') \Leftrightarrow S\varepsilon P$

(17) $(S\varepsilon S\wedge(S+P)\equiv P) \Leftrightarrow S\varepsilon P$

(18) $(M\varepsilon S\wedge M\varepsilon P) \Rightarrow \neg(S'+P')'\equiv(S+S')'$

(19) $(M\varepsilon S\wedge(S+P)\equiv P) \Rightarrow M\varepsilon P$

(20) $(\neg S\equiv(S+S')'\wedge(S+P)\equiv P\wedge P\varepsilon P) \Rightarrow S\varepsilon S$

1.2.Silna adekwatność klasy $K^{\emptyset}$ dla $Ax^{\equiv,\varepsilon,+,'}$. Dla dowolnego *max* zawartego w $\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'}$ określamy jak w 1.2. rozdz. I pojęcia: *max*-filtru, *max*-filtru właściwego i *max*-filtru maksymalnego. Na pojęcia te przenoszą się wszystkie własności przedstawione w 1.2. rozdz. I. Ponadto zauważmy (nie było to nam potrzebne w 1.2. rozdz. I), że jeżeli ∇ jest filtrem właściwym, to

jeśli $\underline{S}\in\nabla$ i $\underline{P}\in\nabla$, to $(\underline{S}'+\underline{P}')'\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$

Istotnie, z określenia filtru otrzymujemy, iż $(\underline{S}'+\underline{P}')'\in\nabla$. Gdyby $(\underline{S}'+\underline{P}')'\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\in max$, to na mocy tezy (8), również $(\underline{S}+\underline{S}')'\in\nabla$. Jednak term ten nie należy do żadnego filtru właściwego.

Mówimy, że term $\underline{S}$ jest *max*-atomem wtw $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$. Zauważmy, że jeżeli $\underline{S}$ jest *max*-atomem, to $/\underline{S}/$ jest filtrem maksymalnym i jest to jedyny filtr, do którego należy $\underline{S}$. Rzeczywiście, na mocy (D2.1.3), $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$, więc $/\underline{S}/$ jest filtrem właściwym, do którego należy $\underline{S}$. Weźmy dowolny filtr właściwy ∇ zawierający $/\underline{S}/$. Pokażemy, że również $\nabla\subset/\underline{S}/$. Istotnie, ponieważ $\underline{S}\in/\underline{S}/\subset\nabla$ oraz ∇ jest filtrem właściwym, więc jeżeli $\underline{M}\in\nabla$, to $(\underline{S}'+\underline{M}')'\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$. Stąd, na mocy tezy (16), $\underline{S}\varepsilon\underline{M}\in max$, a stąd, na mocy (D2.1.2), $(\underline{S}+\underline{M})\equiv\underline{M}\in max$, czyli $\underline{M}\in/\underline{S}/$. Ponadto, identycznie pokazujemy, że $/\underline{S}/$ jest jedynym filtrem maksymalnym, do którego należy $\underline{S}$.

Niech *FM* będzie zbiorem wszystkich filtrów maksymalnych, zaś FM_0 - zbiorem filtrów maksymalnych, do których nie należy żaden *max*-atom (inaczej: $FM_0=FM\setminus\{/\underline{M}/ : \underline{M}$ jest *max*-atomem$\}$).

Dla *max* budujemy model $\mu=(U,d)\in K^{\emptyset}$, w którym $U:=FM\cup\{\{\nabla\} : \nabla\in FM_0\}$, zaś funkcja *d* określona jest na $\mathbb{ZM}$ wzorem: $d(\underline{S}):=\{\nabla : \underline{S}\in\nabla\in FM\}\cup\{\{\nabla\} : \underline{S}\in\nabla\in FM_0\}$.

Korzystając z własności filtrów maksymalnych, indukcyjnie po podtermach można pokazać, że dla dowolnego $\underline{S}$ z $T^{+,'}$:

(x) $D(\underline{S})=\{\nabla : \underline{S}\in\nabla\in FM\}\cup\{\{\nabla\} : \underline{S}\in\nabla\in FM_0\}$.

Teraz, korzystając z (x), udowodnimy, że dla dowolnych $\underline{S},\underline{P}\in T^{+,'}$

(X) $(\underline{S}+\underline{P})\equiv\underline{P}\in max$ wtw $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$,

(XX) $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$ wtw Card $D(\underline{S})=1$.

Z (X) i tezy (8) otrzymujemy : $\underline{S}\equiv\underline{P}\in max$ wtw $D(\underline{S})=D(\underline{P})$. Podobnie, z (X), (XX) oraz tezy (17) otrzymujemy: $\underline{S}\varepsilon\underline{P}\in max$ wtw Card $D(\underline{S})=1$ i $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$.

Załóżmy zatem, że dla $\underline{S},\underline{P}\in T^{+,'}$, $(\underline{S}+\underline{P})\equiv\underline{P}\in max$. Jeżeli $\nabla\in D(\underline{S})$, to identycznie jak w rozdz. I pokazujemy, że $\nabla\in D(\underline{P})$. Ponadto, jeżeli dla pewnego $\nabla\in FM_0$, $\{\nabla\}\in D(\underline{S})$, to $\underline{S}\in\nabla$, $\underline{S}$ nie jest *max*-atomem oraz $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$. Stąd, na mocy tezy (20), również $\underline{P}$ nie jest, w tym przypadku, *max*-atomem. Ponadto, na mocy założenia, $\underline{P}\in\nabla$. Zatem $D(\underline{S})\subset D(\underline{P})$.

Identycznie jak w 1.2. rozdział I, pokazujemy, że jeżeli $(\underline{S}+\underline{P})\equiv\underline{P}\notin max$, to $D(\underline{S})\setminus D(\underline{P})\neq\emptyset$.

Jeżeli $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\in max$, to $/\underline{S}/$ jest jedynym filtrem maksymalnym, do którego należy $\underline{S}$. Ponieważ $/\underline{S}/\notin FM_0$, więc $D(\underline{S})=\{/\underline{S}/\}$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\underline{S}\varepsilon\underline{S}\notin max$. Rozważmy trzy możliwości:

a) $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\in max$: wtedy $D(\underline{S})=\emptyset$

b) $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$ i nie istnieje taki *max*-atom $\underline{M}$, że $(\underline{M}+\underline{S})\equiv\underline{S}\in max$: wtedy $\underline{S}$ należy do pewnego filtru maksymalnego ∇_0 (1.2. rozdz. I) i ponadto, każdy filtr maksymalny, do którego należy $\underline{S}$, należy do FM_0. Istotnie, gdyby istniał filtr maksymalny ∇, do którego należałby $\underline{S}$ i pewien *max*-atom $\underline{M}$, to $/\underline{M}/=\nabla\supset/\underline{S}/$, czyli $(\underline{M}+\underline{S})\equiv\underline{S}\in max$ wbrew założeniu. Zatem, na mocy (x), $\{\nabla_0,\{\nabla_o\}\}\subset D(\underline{S})$, tj. Card$D(\underline{S})>1$.

c) $\underline{S}\equiv(\underline{S}+\underline{S}')'\notin max$ i istnieje taki *max*-atom $\underline{M}$, że $(\underline{M}+\underline{S})\equiv\underline{S}\in max$:

wtedy $\underline{S} \in /\underline{M}/$, więc $/\underline{M}/ \in D(\underline{S})$. Ponadto, na mocy (20) i przyjętych założeń, $(\underline{S}+\underline{M}) \equiv \underline{M} \notin max$. Zatem (jak pokazano w 1.2. rozdz. I) istnieje filtr maksymalny ∇, do którego należy $\underline{S}$ i nie należy $\underline{M}$. Ponieważ $\underline{M} \in /\underline{M}/$, więc $/\underline{M}/ \neq \nabla$, $\{\nabla, /\underline{M}/\} \subset D(\underline{S})$, więc Card $D(\underline{S})>1$.

1.3.Rozszerzenia definicyjne. Na mocy tezy (4) możemy dołączyć do zbioru $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,\varepsilon,+,'}$ definicję (def_1V). Ponadto, dołączając pozostałe definicje podane we wstępie do tego rozdziału, otrzymamy system, względem którego silnie adekwatna jest klasa $K^{\emptyset}$.

§2. Aksjomatyzacja teorii TAUT($\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'}$)

Oczywiście, teoria TAUT($\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'}$) nie jest związana bezpośrednio z ontologią Leśniewskiego, w której nie zakłada się niepustości uniwersum. TAUT($\sum^{\equiv,\varepsilon,+,'}$) traktujemy jako pewne rozszerzenie (niezdegenerowanej) boole'owskiej teorii sylogistycznej TAUT($\sum^{\equiv,+,'}$).

2.1.Aksjomaty specyficzne. Niech $\mathbf{Ax}^{\equiv,\varepsilon,+,'} := \mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,\varepsilon,+,'} \cup \{(D1.1.6)\}$. Z uwagi podanej w §2. rozdz. I wynika, że system wyznaczony przez $\mathbf{Ax}^{\equiv,\varepsilon,+,'}$ równoważny jest systemowi wyznaczonemu przez zbiór $\mathbf{Ax}_{\emptyset}^{\equiv,\varepsilon,+,'} \cup \{(D1.2.1)\}$.

2.2.Silna adekwatność klasy K dla $\mathbf{Ax}^{\equiv,\varepsilon,+,'}$. Identycznie jak w 1.3. rozdz. I można pokazać, że zbiór filtrów maksymalnych jest niepusty. Zatem w tym przypadku, model podany w 1.2. ma niepuste uniwersum, tzn. należy do klasy K.

2.3.Uniwersum co najmniej dwuelementowe. Rozszerzając zbiór $\mathbf{Ax}^{\equiv,\varepsilon,+,'}$ o dodatkowy aksjomat:

$$\neg(S+S')\varepsilon(S+S')$$

otrzymamy system, względem którego silnie adekwatna jest klasa modeli o uniwersum co najmniej dwuelementowym. Istotnie, w tym przypadku w modelu omawianym w 1.2. mamy: $D(\underline{S}+\underline{S}')=U \neq \emptyset$ oraz Card

$D(\underline{S}+\underline{S}')\neq 1$, tj. Card $U>1$.

2.4.Rozszerzenia definicyjne. Dołączając do $\mathbf{Ax}^{\equiv,\varepsilon,+,'}$ definicje podane we wstępie do tego rozdziału, otrzymamy system, względem którego silnie adekwatna jest klasa K.

Dodatek

Elementarna algebra Boole'a i jej pewne rozszerzenie

1. Elementarna teoria z identycznością oparta na poniższych aksjomatach specyficznych :

I) $x''=x$

II) $x+(y+y')'=x$

III) $x+(y+z)'=((y'+x)'+(z'+x)')'$

IV) $x\cdot y=(x'+y')'$

V) $1=x+x'$

VI) $0=(x+x')'$

jest równoważna elementarnej teorii algebr Boole'a, opartej na aksjomatach Huntingtona ([18], s. 103-107). Wyprowadzimy teraz z I-VI aksjomaty Huntingtona (odwrotna wyprowadzalność jest oczywista; I-VI są prawdziwe w każdym ciele zbiorów) :

(1) $x+x=x$

$x=x+(x'+x'')'=((x''+x)'+(x'''+x)')'=((x+x)'+(x'+x'')')'=(x+x)''=$

$=x+x$

(1') $x\cdot x=x$

$x\cdot x=(x'+x')'=x''=x$

(2) $x+y=y+x$ (2') $x*y=y*x$

$x+y=x+y''=x+(y'+y')'=(((y''+x)'+(y''+x)')')=y+x$

(3) $x+x'=y+y'$ (3') $x+x=1$

$x+x'=(x+x')+(y+y')'=((y'+(x+x'))'+(y''+(x+x'))')'$

$y+y'=y+(y+(x+x')')'=((y'+y)'+((x+x')''+y)')'=$

$=((y+(x+x')'+(y+y')')'=y+(x+x')=y''+(x+x')$

$y+y'=y''+y'=$...jak wyżej ...$=y'+(x+x')$

czyli: $x+x'=((y+y')'+(y+y')')'=(y+y')''=y+y'$

(4) $x\cdot(y+y')=x$ (4') $x\cdot 1=x$

$x\cdot(y+y')=(x'+(y+y')')'=x''=x$

(5) $x\cdot x'=(y+y')'$ (5') $x\cdot x'=0$

$x\cdot x'=(x'+x'')'=(x+x')'=(y+y')'$

(6) $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$

$x+(y\cdot z)=x+(y'+z')'=((y''+x)'+(z''+x)')'=(y+x)\cdot(z+x)$

(7) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

$x\cdot(y+z)=(x'+(y+z)')'=(((y'+x')'+(z'+x')')')'=(y\cdot x)+(z\cdot x)$

Formuły (2), (2'), (3'), (4'), (5'), (6), (7) oraz $x+0=x$ (wyprowadzalna z II i VI) stanowią, jak wiadomo, aksjomatykę Huntingtona. Z aksjomatów tych można wyprowadzić tezy ([18], s. 107):

$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

2. W języku algebry Boole'a łatwo otrzymać odpowiedniki formuł z $\sum^{\equiv,+,'}$, zastępując po prostu zmienne z $\mathbb{ZM}$ zmiennymi indywiduowymi (oczywiście, należy przyjąć jakieś wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie obu rodzajów zmiennych), zaś stałą $\equiv$ predykatem identyczności. Wyprowadzenie danej formuły należącej do $\sum^{\equiv,+,'}$ z $Ax_{\emptyset}^{\equiv,+,'}$ równoważne jest wyprowadzeniu jej odpowiednika z aksjomatów I-III oraz aksjomatów logiki pierwszego rzędu z identycznością. Wyprowadźmy zatem następujące tezy algebry Boole'a :

$x+(y+y')=y+y'$ $x+1=1$

$x+(y+y')=x+(x+x')=(x+x)+x'=x+x'=y+y'$

$x=x' \Rightarrow y=z$

$y=y+(x+x')'=y+(x+x')=x+x'=x+x=x$, podobnie $z=x$

$x=y \Leftrightarrow (x+y=x \wedge x+y=y)$

$x=y\Leftrightarrow(x+y=x+x\wedge x+y=y+y)\Leftrightarrow(x+y=x\wedge x+y=y)$

$x=y \Leftrightarrow x'=y'$

$x=y\Rightarrow x'=y'\Rightarrow x''=y''\Rightarrow x=y$

$(x'+y)'+x=x$ $(x\cdot z)+x=x$

$x=x\cdot 1=x\cdot(y'+1)=(x\cdot y')+(x\cdot 1)=(x'+y'')'+x=(x'+y)'+x$

$(y'+x)'+x=x \Rightarrow y+x=x$

$y+x=y+x+(y'+x)'=x+y+(y'+x)'=x+((y''+y)'+(x'+y)')'=x+(y'+(x'+y)')'=$

$=((y'+x)'+((x'+y)'+x)')'=((y'+x)'+x')'=x''=x$

$(x'+y)'=(x+x')' \Leftrightarrow x+y=y$

$y=y+(x+x')'=y+(x'+y)'=((x''+y)'+(y'+y)')'=(x+y)''=x+y$

$(x'+y)'=(x'+(x+y))'=((x'+x)+y)'=(x+x')'$

$x=(x+x')' \Rightarrow x+y=y$

$x+y=y+x=y+(x+x')'=y$

$(x+y=y \wedge x+y'=y') \Rightarrow x=(x+x')'$

$(x \cdot y'=0 \wedge x \cdot y=0) \Rightarrow x=0$

$x=x \cdot 1=x \cdot (y+y')=(x \cdot y)+(x \cdot y')=0+0=0$

3. W rozszerzonej algebrze Boole'a z 1. o aksjomaty:

VII) $x \varepsilon y \Rightarrow x \varepsilon x$

VII) $x \varepsilon y \Rightarrow x+y=y$

IX) $x \varepsilon x \Rightarrow x \neq 0$

X) $(x+z=z \wedge z \varepsilon z \wedge x \cdot y \neq 0) \Rightarrow x \varepsilon y$

wyprowadzimy tezy, wykorzystując 1 i 2 :

$(x \varepsilon x \wedge x \cdot y \neq 0) \Leftrightarrow x \varepsilon y$

$x \varepsilon y \Rightarrow (x \varepsilon x \wedge x+y=y) \Rightarrow (x \neq 0 \wedge x+y=y) \Rightarrow x+y' \neq y' \Rightarrow x \cdot y \neq 0$

odwrotnie - na mocy X) i (1) z 1.

$(x \varepsilon x \wedge x+y=y) \Leftrightarrow x \varepsilon y$

$(x \varepsilon x \wedge x+y=y) \Rightarrow (x \neq 0 \wedge x+y=y) \Rightarrow x \cdot y \neq 0$, $(x \varepsilon x \wedge x \cdot y \neq 0) \Rightarrow x \varepsilon y$

odwrotnie - jak w poprzednio dowodzonej implikacji.

Podstawiając w X) y/x otrzymujemy:

$(x \neq 0 \wedge x+z=z \wedge z \varepsilon z) \Rightarrow x \varepsilon x$

4. W języku rozszerzonej algebry Boole' a, analogicznie jak w 2, otrzymujemy odpowiedniki formuł z $\sum^{\equiv, \varepsilon, +, '}$. Podobnie jest z wyprowadzalnością tez.

SPIS AKSJOMATÓW

Zebrano tutaj niektóre aksjomaty specyficzne systemów badanych w częściach C i D, aby ułatwić ich odnajdywanie. Niniejsza lista obejmuje tylko te aksjomaty, których numer został wymieniony poza paragrafem wprowadzającym po raz pierwszy owe aksjomaty. Formuły numerujemy według zasady podanej na końcu komentarza do konstrukcji części C i D. Nie podajemy osobnego spisu definicji, gdyż są one zebrane na stronach 53-55.

(C1.1.1) $S \equiv S$

(C1.1.2) $S \equiv P \Rightarrow P \equiv S$

(C1.1.3) $(S \equiv M \wedge M \equiv P) \Rightarrow S \equiv P$

(C1.2.1) SaS

(C1.2.2) $(SaM \wedge MaP) \Rightarrow SaP$

(C1.2.3) SaV

(C1.3.1) $(exS \wedge SaP) \Rightarrow exP$

(C1.3.2) $\neg exS \Rightarrow SaP$

(C1.3.3) exV

(C1.4.1) $Sa^{*}P \Rightarrow Sa^{*}S$

(C1.4.2) $Sa^{*}P \Rightarrow Pa^{*}P$

(C1.4.3) $(Sa^{*}M \wedge Ma^{*}P) \Rightarrow Sa^{*}P$

(C1.4.4) $Sa^{*}S \Rightarrow Sa^{*}V$

(C1.4.5) $Va^{*}V$

(C1.5.1) $SiP \Rightarrow SiS$

(C1.5.2) $SiP \Rightarrow PiS$

(C1.5.3) $SiS \Rightarrow SiV$

(C1.5.4)	ViV
(C1.6.1)	(MiS∧MaP)⇒SiP
(C1.6.2)	¬SiS⇒SaP
(C2.2.1)	SiS
(C2.2.2)	SiV
(C3.1.1)	SεP⇒SεS
(C3.1.2)	(SεP∧PεP)⇒PεS
(C3.1.3)	(SεM∧MεP)⇒SεP
(C3.1.4)	SεS⇒SεV
(C3.1.5)	VεP⇒PεP
(C3.2.1)	SεP⇒SaP
(C3.2.2)	(SεS∧SaP)⇒SεP
(C3.2.3)	(SεP∧PaS)⇒PεP
(C3.2.4)	(¬SεS∧SaM∧MεM)⇒SaP
(C3.2.5)	(ex!S∧SaP)⇒(PaS⇔ex!P)
(C3.2.6)	(¬ex!S∧SaM∧ex!M)⇒SaP
(C3.2.7)	(SaP∧solP)⇒solS
(C3.2.8)	(SaM∧solM∧¬MaS)⇒SaP
(C3.3.3)	SεP⇒Sa˚P
(C3.3.8)	(Sa˚P∧ex!P)⇒ex!S
(C3.3.10)	ex!S⇒Sa˚S
(C3.3.13)	(Sa˚P∧solP)⇒solS
(D1.1.6)	¬ S≡S′
(D1.2.1)	¬ (S+S′)≡(S+S′)′

BIBLIOGRAFIA

[1] Bočarov W. A., *Aristotel i tradicjonnaja łogika*, Moskva 1984.

[2] Borkowski L., *Logika formalna*, Warszawa 1977.

[3] Gumański L., *Logika klasyczna a założenia egzystencjalne*, Zeszyty Naukowe UMK w Toruniu, Filozofia I, Toruń 1960, s. 3-64.

[4] Gumański L., *Wprowadzenie w logikę współczesną*, Toruń 1981.

[5] Gumański L., *Logika modalna*, Ruch Filozoficzny t. XLI nr 2-3 (1984), s. 163-177.

[6] Iwanuś B., *On Leśniewski's Elementary Ontology*, Studia Logica XXXI (1973), s. 73-119.

[7] Kotarbiński T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, wydanie II, Wrocław 1961.

[8] Küng G., *Nominalistische Logik heute*, Allgemeine Zeitschrift für Philosophie 1:1977, s. 29-52.

[9] Küng G., *Systemy Leśniewskiego*, (w:) *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, s. 397-405.

[10] Küng G. i Canty J. T., *Substitutional quantification and Leśniewskian quantifiers*, Theoria 36:1970, s. 165-182.

[11] Lejewski C., *On Leśniewski's Ontology*, przedruk (w:) *Leśniewski's System*, Wrocław 1984, s. 123-148.

[12] Łukasiewicz J., *Elementy logiki matematycznej*, skrypt, Warszawa 1929.

[13] Łukasiewicz J., *O sylogistyce Arystotelesa*, (w:) *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, red. J. Słupecki, Warszawa 1961, s. 220-227.

[14] Łukasiewicz J., *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Warszawa 1988.

[15] Łukasiewicz J. i Tarski A., *Badania nad rachunkiem zdań*, (w:) *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, red. J. Słupecki, Warszawa 1961, s. 129-143.

[16] *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Wrocław 1970.

[17] Morawiec A., *Podstawy logiki nazw*, Studia Logica XII (1961), s. 145-161.

[18] Mostowski A., *Logika matematyczna*, Warszawa-Wrocław 1948.

[19] Nowaczyk A., *Logiczne podstawy nauk ścisłych*, Warszawa 1985.

[20] Pietruszczak A., *O logice tradycyjnej i rachunku nazw dopuszczającym podstawienia nazw pustych*, Ruch Filozoficzny t. XLIV nr 2 (1987), s. 158-166.

[21] Pietruszczak A., *Pewien boole'owski rachunek nazw a elementarna teoria algebr Boole'a*, Ruch Filozoficzny t. XLV nr 1 (1988), s. 59-66.

[22] Pietruszczak A., *Standardowe rachunki nazw z funktorem Leśniewskiego*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Logika I, Toruń 1991, s. 5-29.

[23] Pietruszczak A., *Teoriomnogościowa formalizacja pewnej interpretacji formuł rachunku nazw z kwantyfikatorami*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Logika II, Toruń 1991, s. 41-52.

[24] Pogorzelski W. A., *Klasyczny rachunek zdań*, Warszawa 1975.

[25] Pogorzelski W. A. i Wojtylak P., *Elements of the Theory of Completeness in Propositional Logic*, Silesian University, Katowice 1982.

[26] Quine W. V. O., *Methods of Logic*, New York 1955.

[27] Quine W. V. O., *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa 1969.

[28] Quine W. V. O., *Filozofia logiki*, Warszawa 1977.

[29] Quine W. V. O., *Ways of Paradox*, New York 1966.

[30] Shepherdson J. C., *On the Interpretation of Arystotelian Syllogistic*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 21, No. 2 (1956), s. 137-147.

[31] Słupecki J., *Uwagi o sylogistyce Arystotelesa*, Annales UMCS, vol. I, nr 3, sectio F, Lublin 1946, s. 187-191.

[32] Suchoń W., *Sylogistyka a nazwy puste*, Studia Filozoficzne 11-12 1984, s. 69-74.

[33] Takano M., *A Semantical Investigation into Leśniewski's Axiom of His Ontology*, Studia Logica XLIV 1 (1985), s. 71-77.

[34] Wedberg A., *The Arystotelian Theory of Classes*, Ajatus, Vol. 15 (1948), s. 299-314.

ERRATA

Str. 8: usunąć pierwszy wiersz i jako ostatni dodać: musimy wyłącznie operować w metateorii bezkwantyfikatorowego ra-
Str. 10: usunąć pierwszy wiersz
Str. 58: dołączyć: (def i!) Si!P $\langle = \rangle$ (S′ + P′)′ ε (S′ + P′)′

Strona i wiersz	Jest	Powinno być
4^{11}	BIBLIOGRAFI	BIBLIOGRAFIA
5_1	racunek	rachunek
6^7	znich	z nich
6_7	zdania	—
7^1	dzące	wywodzące
7^1	Leśniewskiego	Leśniewskiego —
7^{10}	uniweralną	uniwersalną
7_{10}	zbio	zbio-
9^5	uniweralnej	uniwersalnej
10_9	Uniwerytetu	Uniwersytetu
18_5	ni	nie
28_1	należ	należy
68^2	i nwariantnymi	inwariantnymi
68^2	odrywaniowyymi	odrywaniowymi
76^1	s. 63	s. 65
76^{12}	s. 64	s. 65
76_{10}	s. 61	s. 63
76_7	s. 62	s. 64
77_7	s. 71	s. 74
77_2	??	74
78^6	s. 71	s. 74
78^{12}	s. 65	s. 67
78_{11}	s. 39	s. 40
79^1	s. 66	s. 67
79_3	paragrafu	numeru paragrafu
79_1	numeru	numeru formuły
80_{18}	s. 47	s. 48
80_{12}	42	43
80_7	s. 50	s. 51
89_2	dołączonychw	dołączonvch w
92^8	s. 47	s. 48
96^2	s. 42	s. 43
96^7	s. 50	s. 51
122^{20}	x y = y x	x·y = y·x
124_3	Boole' a	Boole'a
125^8	53—55	55—58